

Лекция №6

Тема: Методология теоретических исследований.

Цель лекции: ознакомить методологией теоретических исследований.

1. Аналитические методы.

2. Вероятностно – статистические методы.

Основные понятия: внешнее и внутреннее правдоподобие исследования, теория вероятности, математическая статистика.

1. Аналитические методы

Выбор метода исследования математической модели непосредственно связан с такими понятиями, как внешнее и внутреннее правдоподобие исследования.

Под *внешним* правдоподобием исследования понимается ожидаемая степень адекватности математической модели реальному объекту по интересующим исследователя свойствам.

Под *внутренним* правдоподобием исследования понимается ожидаемая степень точности решения полученных уравнений, которые приняты за математическую модель объекта.

Если вид модели уже выбран, то внешнее правдоподобие модели считается фиксированным и выбор метода исследования будет целиком определяться необходимой степенью внутреннего правдоподобия.

В подавляющем большинстве случаев при выборе метода исследования руководствуются принципом соответствия внешнего и внутреннего правдоподобия, аналогичным известному правилу приближенных вычислений: степень точности вычислений должна соответствовать степени точности исходных данных. Однако в зависимости от условий и задач исследования возможны отклонения от принципа. Перечислим некоторые из них:

1) если речь идет о разработке нового единого метода исследований, который предполагается применять к широкому, заранее не фиксированному, классу моделей, то нужно стремиться к максимальному внутреннему правдоподобию исследования независимо от уровня внешнего правдоподобия;

2) если осуществляется проверка внешнего правдоподобия модели, то внутреннее правдоподобие избранного метода проверки должно быть максимальным;

3) если модель настолько проста, что для нее легко получить точное решение, то искусственно понижать строгость решения бессмысленно.

В других случаях предпочтение отдается «принципу равного правдоподобия».

Выбор метода исследования тем эффективнее, чем больше имеется сведений о конечном решении задачи. Такие сведения могут быть получены путем прикидочных исследований модели или ее элементов.

В процессе прикидочных исследований осуществляется сравнение величин отдельных членов уравнений в изучаемом диапазоне изменения переменных и параметров задачи.

Относительно малые слагаемые отбрасываются, нелинейные зависимости заменяются на линейные. Некоторые из компонентов модели аппроксимируются грубыми уравнениями. Все это позволяет быстро получить грубое решение задачи.

Знание, хотя бы самое грубое, качественных и количественных характеристик искомого решения помогает при выборе точности метода исследования. Иногда даже грубое решение оказывается достаточным. В качестве примера можно привести задачу о поиске экспериментального значения функции. Если точка экстремума является стационарной, то даже грубая ошибка в ее отыскании мало скажется на подсчете этого значения. Поэтому применение высокоточных методов поиска такого экстремума нерационально. Громоздкие

точные вычисления в этом случае создают лишь иллюзию точности. В случае применения грубой математической модели не следует применять громоздкие вычислительные методы.

Выбор метода исследования математической модели во многом предопределен ее видом.

Статические системы, представленные при помощи алгебраических уравнений, исследуются с помощью определителей, метода итераций, методов Крамера и Гаусса. В случае затруднений с аналитическими решениями используются приближенные методы: графический метод; метод хорд; метод касательных; метод итераций. В последнем случае, который требует контроля точности (числа значащих цифр) в зависимости от грубости вычислительного метода, целесообразно применение ЭВМ.

Исследование динамических режимов функционирования объекта, представленных в классе дифференциальных уравнений, также предопределяется классом, к которому относится решаемое уравнение.

Если в результате решения алгебраических уравнений получаются числа, то при решении дифференциальных уравнений получаются функции.

Для решения дифференциальных уравнений широко используются метод разделения переменных, метод подстановки, метод интегрирующего множителя, метод качественного анализа и т.п. Для получения приближенных решений используют метод последовательных приближений, метод функциональных рядов, метод Рунге - Кутты, численные методы интегрирования и т.п.

Для подробного изучения моделей динамических систем, построенных в классе дифференциальных уравнений, используется качественная теория дифференциальных уравнений.

Качественная теория дифференциальных уравнений позволяет изучить все возможные решения - регулярные и особые.

В основе качественной теории лежит понятие фазового портрета системы. Построение фазового портрета иллюстрируется следующим примером. Пусть рассматривается система, описываемая следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0;$$

при начальных условиях

$$y(0) = y_0,$$

$$\frac{\partial y(0)}{\partial t} = y_0.$$

Частное решение этого уравнения представляется в виде

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Принимая $\frac{dy}{dx}$ за новую искомую функцию и вводя обозначения

$$y = z_1$$

$$dy/dt = z_2$$

преобразуем исходное дифференциальное уравнение в систему уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2; \\ z_2 &= -\omega^2 z_1; \end{aligned}$$

при начальных условиях

$$z_1(0) = y_0, \quad z_2(0) = y_0.$$

Частное решение имеет вид

$$\begin{aligned} z_1 &= y_0 \cos \omega t + y_0/\omega \sin \omega t \\ z_2 &= -y_0 \omega \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Из полученной системы уравнений для z_1 и z_2 , исключая t , имеем

$$\frac{z_1^2}{\rho_0^2} + \frac{z_2^2}{(\omega \rho_0)^2} = 1;$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega^2}} > 0.$$

Последнее уравнение описывает эллипс на плоскости $z_1 z_2$. Следовательно, частное решение для z_1 и z_2 выражается зависимостью от времени текущих координат точки $M(t)$, которая начинает свое движение в момент $t = 0$ от точки $M_0 (y_0, y_0)$ и движется по эллипсу (рис.4).

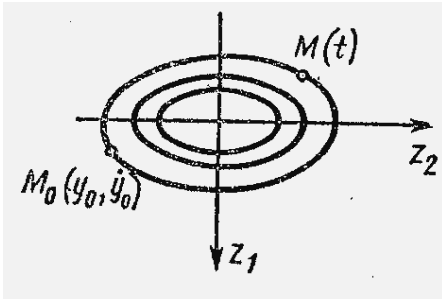


Рис.4. Фазовый портрет системы

Точка $M(t)$ называется *изображающей точкой*. Траектория такой точки называется *фазовой траекторией*.

Изменяя начальные условия, можно получить семейство фазовых траекторий, которое называется *фазовым портретом*, а плоскость $z_1 z_2$, на которой расположено это семейство, - *фазовой плоскостью*.

В строительстве ряд задач исследуется с помощью интегральных уравнений, содержащих искомую функцию $\varphi(s)$ под знаком интеграла:

$$h(x)\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,s)\varphi(s)ds = f(x),$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$ — известные функции x ; λ — постоянный параметр, который называют собственным числом; $k(x,s)$ — заданная функция, которую называют ядром интегрального уравнения.

2. Вероятностно-статистические методы

Во многих случаях необходимо исследовать не только детерминированные, но и случайные, вероятностные (стохастические) процессы. Обычно технологические процессы выполняются в условиях непрерывно меняющейся обстановки: вынужденные простои машин; неравномерная работа транспорта; непрерывное изменение внешних (например, метеорологических) факторов и т.д. Те или иные события могут произойти или не произойти.

В связи с этим приходится анализировать случайные, вероятностные или стохастические связи, в которых каждому аргументу соответствует множество значений функции. Наблюдения показали, что, несмотря на случайный характер связи, рассеивание имеет вполне определенные закономерности. Для таких статистических законов теория вероятностей позволяет представить исход не одного какого-либо события, а средний результат случайных событий и тем точнее, чем больше число анализируемых явлений. Это связано с тем, что, несмотря на случайный характер событий, они подчиняются определенным закономерностям, рассматриваемым в теории вероятностей.

Т е о р и я в е р о я т н о с т е й изучает случайные события и базируется на следующих основных показателях. Совокупность множества однородных событий случайной величины x составляет первичный статистический материал. Совокупность, содержащая самые

различные варианты массового явления, называют *генеральной совокупностью* или большой выборкой N . Обычно изучают лишь часть генеральной совокупности, называемой выборочной совокупностью или малой выборкой N_1 .

Вероятностью $p(x)$ события x называют отношение числа случаев $N(x)$, которые приводят к наступлению события x к общему числу возможных случаев N :

$$p(x) = N(x)/N. \quad (1)$$

Теория вероятностей рассматривает теоретические распределения случайных величин и их характеристики. Математическая статистика занимается способами обработки и анализа эмпирических событий. Эти две родственные науки составляют единую математическую теорию массовых случайных процессов, широко применяемую в научных исследованиях.

В математической статистке важное значение имеет понятие о частоте события $\bar{y}(x)$, представляющего собой отношение числа случаев $n(x)$, при которых имело место событие к общему числу событий n :

$$\bar{y}(x) = n(x)/n. \quad (2)$$

При неограниченном возрастании числа событий частота $y(x)$ стремится к вероятности $p(x)$. Частота $y_{i0} = n(x)/\sum n(x)$ характеризует вероятность появлений случайной величины и представляет собой ряд распределения (рис.5), а плавная кривая — закон (функцию) распределения $F(x)$.

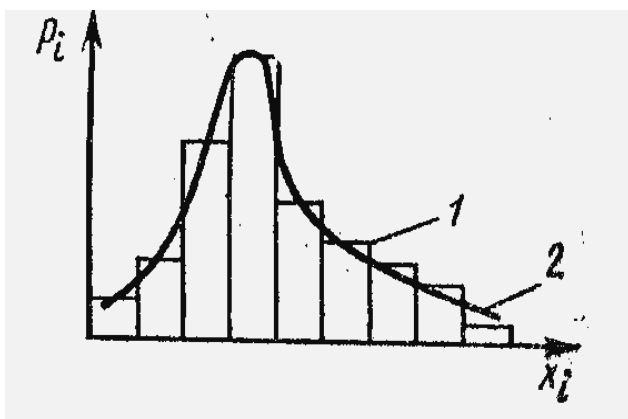


Рис.5.Общий вид распределения случайных величин:

1 – гистограмма; 2 – кривая распределения

Вероятность случайной величины (события) - это количественная оценка возможности ее появления.

Достоверное событие имеет вероятность $p=1$, невозможное событие $p=0$. Следовательно, для случайного события $0 \leq p(x) \leq 1$, а сумма вероятностей всех возможных значений

$$\sum_0^n p_i = 1 \quad (3)$$

В исследованиях иногда недостаточно знать функцию распределения. Необходимо еще иметь ее характеристики: среднее арифметическое и математическое ожидания, дисперсию, размах ряда распределения.

Пусть среди n событий случайная величина x_i , повторяется n_1 раз, величина x_2 - n_2 раза и т.д. Тогда среднее арифметическое значение x имеет вид

$$\bar{x} = \sum_1^n (x_i n_i) / n. \quad (4)$$

Размах можно использовать для ориентировочной оценки вариации ряда событий:

$$R = x_{\max} - x_{\min}, \quad (5)$$

где x_{\max} , x_{\min} - максимальное и минимальное значения измеренной величины или погрешности.

Если вместо эмпирических частот y_1, \dots, y_n принять их вероятности p_1, \dots, p_n , то это даст важную характеристику распределения - математическое ожидание:

$$m(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (6)$$

Пусть, например, имеется пять измерений одной выборки: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$ с вероятностями $p_1 = 0,10$; $p_2 = 0,15$; $p_3 = 0,45$; $p_4 = 0,30$; $p_5 = 0$. В этом случае среднее значение $x = 15/5 = 3,0$, а математическое ожидание составит в соответствии с формулой (6) $m(x) = 1 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,45 + 4 \cdot 0,30 + 5 \cdot 0 = 2,95$.

Для непрерывных случайных величин математическое ожидание определяется интегралом

$$m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, \quad (7)$$

т. е. оно равно действительному значению x_d наблюдаемых событий. Таким образом, если систематические погрешности измерений полностью исключены, то истинное значение измеряемой величины равно математическому ожиданию, а соответствующая ему абсцисса называется *центром распределения*. Площадь, расположенная под кривой распределения (рис.5), соответствует единице вследствие того, что кривая охватывает все результаты измерений. Для одной и той же площади можно построить большое количество кривых распределения, т.е. они могут иметь различное рассеяние. Мерой рассеяния (точности измерений) является *дисперсия* или *среднеквадратичное отклонение*.

Таким образом, дисперсия характеризует рассеивание случайной величины по отношению к математическому ожиданию и вычисляется с помощью формулы

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - m(x))^2 p_i. \quad (8)$$

Для рассмотренного выше примера $D(x) = (1-2,95)^2 \cdot 0,10 + (2-2,95)^2 \cdot 0,15 + (3-2,95)^2 \cdot 0,45 + (4-2,95)^2 \cdot 0,30 + (5-2,95)^2 \cdot 0 = 0,83$.

Важной характеристикой теоретической кривой распределения является *среднеквадратичное отклонение*:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \quad (9)$$

Коэффициент вариации

$$k_B = \sigma/m(x) \quad (10)$$

применяется для сравнения интенсивности рассеяния в различных совокупностях, определяется в относительных единицах ($k_B < 1$).

Выше были рассмотрены основные характеристики теоретической кривой распределения, которые анализирует теория вероятностей.

В статистике оперируют с эмпирическими распределениями. Основной задачей статистики является подбор теоретических кривых по имеющемуся эмпирическому закону распределения.

Пусть в результате n измерений случайной величины получен ряд ее значений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

При первичной обработке таких рядов их вначале группируют в интервалы и усредняют для каждого из них частоты y_i и \bar{y}_{0i} . По значениям x_i и \bar{y}_{0i} строят ступенчатую гистограмму частот и вычисляют характеристики эмпирической кривой распределения.

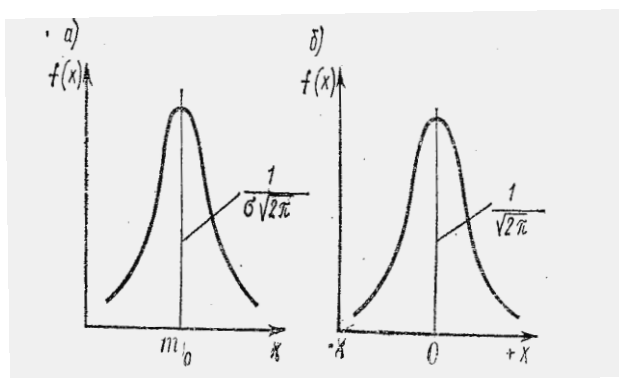


Рис.6.Общий вид кривой нормального распределения: а – $m(x) \neq 0$; б – $m(x) = 0$

Основными характеристиками эмпирического распределения являются среднее арифметическое значение $\bar{x} = \sum_1^n x_i / n$, дисперсия $D = \sum_1^n (x_i - \bar{x})^2 / n$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D}$. Значения этих величин соответствуют величинам \bar{x} , $D(x)$ и $\sigma(x)$ теоретического распределения.

В исследованиях наиболее часто применяется закон нормального распределения (рис. 6):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{[x - m(x)]^2}{2\sigma^2}\right] \quad (11)$$

Это уравнение соответствует функции нормального распределения при $m(x) \neq 0$ (рис. 3, а). Если совместить ось ординат с точкой m , т. е. $m(x) = 0$ (рис. 3, б), и принять $\sigma^2 = 1$, то знаки нормального распределения описываются зависимостью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad (12)$$

если за единицу масштаба принять дисперсию σ^2 .

Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается суть аналитического метода?
2. С чем непосредственно связан выбор метода исследования математической модели?
3. Чем объясняются отклонения от принципа соответствия внешнего и внутреннего правдоподобия при выборе метода исследования?
4. В чем заключается суть вероятностно-статистических методов?
5. Чем занимается математическая статистика?

Список литературы:

1. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология научного исследования. – М.: Либроком. – 2010. – 280 с. <http://www.mtas.ru/upload/library/mni.pdf>
2. Овчаров А.О., Овчарова Т.Н. Методология научного исследования. – М.: ИНФРА-М. – 2019. – 304 с. <https://znanium.com/read?id=327846>
3. Космин В.В. Основы научных исследований. – М.: РИОР. ИНФРА – М. – 2019. – 238 с. <https://znanium.com/read?id=357975>
4. <http://library.atu.kz>
5. <http://methodolog.ru/books.htm>