ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 4

Матричный метод и метод Гаусса

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Матричный метод решает невырожденную квадратную систему через обратную матрицу. Метод Гаусса применим шире: он позволяет проверить совместность системы и описать все её решения.

1. Цели обучения

- Решать невырожденную систему по формуле $X = A^{-1}b$;
- Выполнять прямой и обратный ход метода Гаусса;
- Выделять свободные переменные и записывать общее решение.

2. Матричный метод

Квадратная система $AX = b$ при $\det A \neq 0$ имеет единственное решение. Умножим обе части равенства слева на обратную матрицу:

$$A^{-1}AX = A^{-1}b, \qquad \boxed{X = A^{-1}b}.$$

Порядок множителей определяется исходной записью. Столбец b имеет размер $n \times 1$, поэтому произведение $A^{-1}b$ имеет нужный размер $n \times 1$. Выражение bA^{-1} при $n > 1$ обычно вообще не определено.

Матричный метод удобен, если одна и та же матрица коэффициентов используется с разными правыми частями. Обратную матрицу достаточно найти один раз. Однако для

решения одной большой системы её явное вычисление часто требует больше действий, чем исключение неизвестных методом Гаусса.

Пример 1. Решение через обратную матрицу

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x + 2y = 8. \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Определитель равен 1, следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 10 - 8 \\ -15 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка даёт $2 \cdot 2 + 1 = 5$, $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$. Если бы определитель оказался нулём, формула с A^{-1} была бы недоступна, но сама система всё ещё могла бы иметь решения.

3. Идея метода Гаусса и равносильные преобразования

Метод Гаусса последовательно исключает неизвестные из уравнений. Вместо исходной системы строится равносильная, то есть имеющая точно такое же множество решений. Допустимы три операции:

1. переставить два уравнения;
2. умножить уравнение на ненулевое число;
3. прибавить к одному уравнению другое, умноженное на число.

Равносильность следует из обратимости операций: перестановку можно повторить, умножение отменяется делением, прибавление — вычитанием. Умножение уравнения на ноль недопустимо, поскольку условие исчезает и теряется информация.

Вычисления выполняют над *расширенной* матрицей $(A \mid b)$. Любое преобразование строки затрагивает и свободный член. Если изменить только коэффициенты, получится другая система.

На прямом ходе получают ступенчатую форму: ведущий ненулевой элемент каждой следующей ненулевой строки находится правее ведущего элемента предыдущей строки, а нулевые строки помещены внизу. На обратном ходе выражают неизвестные, начиная с последнего независимого уравнения.

4. Подробный прямой и обратный ход

Пример 2. Три уравнения с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Записываем расширенную матрицу и исключаем x из второй и третьей строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

Здесь выполнены $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ и $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$. Для следующего шага удобно поменять вторую и третью строки местами: ведущий элемент 1 позволяет избежать дробей. Затем выполняем $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right).$$

Прямой ход завершён. Полученная система имеет вид

$$-7z = -21, \qquad y - 2z = -4, \qquad x + y + z = 6.$$

При обратном ходе сначала находим $z = 3$, затем $y = -4 + 2 \cdot 3 = 2$, наконец $x = 6 - 2 - 3 = 1$. Подстановка в исходные уравнения проверяет весь расчёт.

Перестановки строк в методе Гаусса не меняют множество решений. Если параллельно вычисляется определитель, его знак надо учитывать отдельно. Правила преобразования определителя и правила равносильного преобразования системы решают разные задачи.

5. Как читать ступенчатую матрицу

Строка $(0, \dots, 0 \mid 0)$ соответствует тождеству $0 = 0$ и не накладывает условий. Строка $(0, \dots, 0 \mid c)$, где $c \neq 0$, соответствует противоречию $0 = c$: система несовместна.

Если противоречия нет, число ведущих позиций равно рангу r. При $r = n$ все неизвестные определяются однозначно. При $r < n$ неизвестные в столбцах без ведущих позиций выбирают свободными; их число равно $n - r$. Остальные неизвестные выражают через них.

Пример 3. Прямоугольная система и два параметра

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 3, \\ 2x + 4y - 2z + 2w = 6, \\ y + z - w = 1. \end{cases}$$

Вычтем удвоенное первое уравнение из второго: оно превращается в $0 = 0$. После переноса нулевой строки вниз остаётся

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ведущими являются неизвестные x, y, свободными — z, w. Полагаем $z = s$, $w = t$. Тогда из второй строки $y = 1 - s + t$, а из первой

$$x = 3 - 2(1 - s + t) + s - t = 1 + 3s - 3t.$$

Общее решение:

$$(x, y, z, w) = (1, 1, 0, 0) + s(3, -1, 1, 0) + t(-3, 1, 0, 1), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Один частный набор, например $(1, 1, 0, 0)$, не заменяет общего решения. Параметры должны пробегать все действительные значения независимо друг от друга.

Если свободный член второго исходного уравнения заменить с 6 на 7, то вычитание даст $0 = 1$. В этом случае вычисления можно остановить: система несовместна независимо от третьего уравнения.

6. Однородные системы и фундаментальная система решений

Для однородной системы $AX = 0$ противоречивая строка появиться не может. Нулевое решение существует всегда. Если ранг равен n, оно единственное; если $r < n$, есть $n - r$ независимых направлений решений.

Пример 4. Построение базиса решений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение зависимо от первого. Выбираем $y = s$, $z = t$, тогда $x = -2s + t$, поэтому

$$X = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оба указанных столбца удовлетворяют системе. Они линейно независимы: из нулевой комбинации по второй координате следует $s = 0$, по третьей — $t = 0$. Такой набор независимых решений, через который выражаются все решения, называется **фундаментальной системой решений**.

Для совместной неоднородной системы общий ответ имеет вид $X = X_p + X_h$, где X_p — любое частное решение, а X_h — общее решение соответствующей однородной системы. Действительно, $A(X_p + X_h) = b + 0 = b$, а разность любых двух частных решений удовлетворяет однородной системе.

7. Нахождение обратной матрицы исключением

Метод Гаусса применим и к построению A^{-1}. К матрице A приписывают единичную матрицу и преобразуют весь блок:

$$(A \mid E) \longrightarrow (E \mid A^{-1}).$$

Одинаковые преобразования строк соответствуют умножению обеих частей слева на одну и ту же обратимую матрицу. Когда слева получается E, справа оказывается искомая обратная матрица.

Для $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ можно сначала заменить R_2 на $2R_2 - 3R_1$, затем исключить второй элемент первой строки и разделить первую строку на 2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, результат совпадает с формулой через алгебраические дополнения. Если привести левую часть к единичной невозможно из-за недостаточного ранга, обратной матрицы нет.

8. Вопросы для самопроверки

1. Почему допустимые преобразования строк сохраняют все решения?
2. Чем отличаются нулевая строка и строка с нулевыми коэффициентами, но ненулевым свободным членом?
3. Как определяется число свободных переменных?
4. Почему вектор разности двух решений неоднородной системы решает однородную систему?
5. Решите $x + y + z = 2,\ 2x + 2y + 2z = 4$ и запишите всё множество решений.
6. Какие вычисления нужно изменить, если выбранный ведущий элемент равен нулю?