ЛЕКЦИЯ 3

Баланс условий: сколько решений у модели

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Набор линейных ограничений может однозначно определить неизвестные, оставить свободу выбора или оказаться противоречивым. Формулы Крамера работают только в первом невырожденном квадратном случае.

Цели обучения

- Переводить условия задачи в систему и расширенную матрицу.
- Исследовать совместность по рангам.
- Применять формулы Крамера, включая задачи с параметром.

Условия калибровки как линейная система

Пусть два неизвестных параметра u, v связаны измеренными комбинациями $u+2v=8$ и $3u-v=3$. Каждое равенство отдельно оставляет бесконечно много вариантов. Общий результат определяется их совместным выполнением. Из второго равенства $v=3u-3$; подстановка в первое даёт $7u=14$, поэтому $u=2$, $v=3$.

Вопрос о существовании и единственности следует отделять от выбора вычислительного приёма. Другая пара уравнений может описывать одно и то же ограничение или противоречить друг другу. Прежде чем делить на выражение с параметром, нужно понять, когда оно обращается в ноль.

Запись всех ограничений одной матрицей

Линейное уравнение имеет вид $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$. Коэффициенты известны, неизвестные не перемножаются между собой и не входят в нелинейные функции. Уравнение $x+2y=4$ линейно, а $xy=4$ — нет.

Для m уравнений вводят основную матрицу A, столбец неизвестных x и правую часть b. Получается $Ax=b$. Расширенная матрица $(A \mid b)$ хранит одновременно коэффициенты

и свободные члены. При записи выбирают один порядок неизвестных для всех строк, а отсутствующий член заменяют нулевым коэффициентом.

Например, $2x - z = 5$, $y + z = -2$ дают

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Порядок столбцов здесь x, y, z. Перестановка только чисел внутри одной строки без соответствующего изменения уравнения недопустима.

Три варианта ответа и критерий рангов

Система называется **совместной**, если решение существует. При единственном решении она определённая, при бесконечном множестве решений — неопределённая. Если решений нет, система несовместна. Над $\mathbb{R}$ ровно два различных решения невозможны: вместе с $x^{(1)}, x^{(2)}$ решением является $(1-t)x^{(1)} + tx^{(2)}$ для любого действительного t.

Критерий совместности

$$Ax = b \text{ совместна} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \mid b).$$

Если общий ранг равен числу неизвестных n, решение единственно. Если общий ранг $r < n$, остаётся $n - r$ свободных переменных.

Объяснение связано со столбцами: произведение Ax есть их линейная комбинация. Решение существует ровно тогда, когда b можно получить такой комбинацией. Добавление уже выражаемого через остальные столбца не увеличивает ранг; независимый добавленный столбец увеличивает его.

Разбор A. Лишнее измерение: проверка или противоречие

К системе $u + 2v = 8$, $3u - v = 3$ добавим $4u + v = c$. Левая часть третьего уравнения является суммой левых частей первых двух. Поэтому необходимое условие совместности — $c = 11$. При $c = 11$ дополнительная строка подтверждает решение $(2, 3)$. При $c \neq 11$ никакого точного решения у трёх равенств нет.

Это также показывает, почему количество уравнений не определяет автоматически количество решений. Три уравнения с двумя неизвестными могут оказаться совместными: решающим является содержание ограничений.

Формулы Крамера из линейности определителя

Пусть матрица квадратная и $\Delta = \det A \neq 0$. Для j-й неизвестной заменим j-й столбец матрицы A столбцом b; определитель новой матрицы обозначим Δ_j. Тогда

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Почему заменяются столбцы? Если обозначить их через a_j, уравнение системы имеет вид $b = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$. Подстановка этой суммы вместо столбца j и линейность

определителя дают сумму. Все слагаемые, кроме $x_j \det A$, содержат повторяющийся столбец и исчезают. Значит, $\Delta_j = x_j \Delta$, откуда и следует формула.

Разбор B. Два параметра по двум измерениям

Вернёмся к исходной модели. Вычисляем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_u = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_v = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -21.$$

Получаем $u = 2$, $v = 3$, как и при подстановке. Проверка производится в обоих исходных равенствах: $2 + 2 \cdot 3 = 8$, $3 \cdot 2 - 3 = 3$.

Разбор C. Три неизвестные

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x - y + 2z = -3, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

Основной определитель равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5) - (-5) - 5 = -10.$$

Вспомогательные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -20,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 10.$$

Поэтому $(x, y, z) = (1, 2, -1)$. Например, последний определитель по первой строке равен $2(-6+6) - (6+9) + 5(2+3) = 10$. Подстановка даёт $2+2+1 = 5$, $1-2-2 = -3$, $3+4-1 = 6$.

Параметр меняет характер решения

Рассмотрим систему

$$x + 2y = 4, \qquad 2x + (4 + k)y = 8 + h.$$

После вычитания удвоенного первого равенства из второго остаётся $ky = h$. Теперь видны все случаи:

- при $k \neq 0$: $y = h/k$, $x = 4 - 2h/k$, решение единственно;
- при $k = 0, h = 0$: $y = t$, $x = 4 - 2t$, параметр t произволен;
- при $k = 0, h \neq 0$: возникает противоречие $0 = h$.

Определитель равен k, поэтому деление в формулах Крамера разрешено только в первом случае. Равенство определителя нулю не различает два остальных случая. Также одних равенств всех определителей Крамера нулю для системы произвольного порядка недостаточно для вывода о совместности: нужен критерий рангов.

Однородные ограничения и проверка ответа

Если $b = 0$, система однородная и заведомо имеет нулевое решение. Ненулевые решения возникают при $\operatorname{rank} A < n$. Например, $x + 2y = 0$ имеет семейство $(-2t, t)$; квадратная однородная система с ненулевым определителем имеет только нулевое решение.

Вычисленный ответ следует подставлять в исходные уравнения, сохраняя их порядок и знаки. При параметрическом ответе подстановка должна давать тождества для всех допустимых параметров. Проверка одного выбранного значения параметра подтверждает только одно решение.

Проверка понимания

1. Объясните критерий совместности через линейную комбинацию столбцов.
2. Почему замена строк вместо столбцов не даёт стандартных формул Крамера?
3. Для $x - 2y = 1$, $3x + y = 10$ найдите решение и выполните подстановку.
4. Исследуйте $x + y = 3$, $2x + 2y = c$ при разных c.
5. Что сообщает равенство рангов $r = 2$, если неизвестных четыре?