ЛЕКЦИЯ 5

Геометрия перемещений, проекций и моментов

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Координаты позволяют складывать перемещения; произведения векторов выделяют их взаимное направление, площадь и объём. Выбор операции зависит от геометрического смысла задачи.

Цели обучения

- Выполнять линейные действия с векторами.
- Вычислять проекции, углы, площади и объёмы.
- Различать скалярное, векторное и смешанное произведения.

От положения инструмента к перемещению

Точка задаёт положение, а вектор между двумя точками — изменение положения. Если начало перемещения $P = (1, 2, -1)$, конец $Q = (3, 1, 1)$, то

$$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 2), \qquad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Для $\overrightarrow{PQ}$ из координат конца вычитают координаты начала. Для обратного направления $\overrightarrow{QP}$ порядок вычитания меняется. При смене направления все координаты меняют знак, а длина остаётся прежней.

Свободный вектор можно переносить параллельно самому себе. Для его описания важны длина и направление, но не выбранная точка приложения. В задачах о моменте силы точка приложения уже существенна, поэтому отдельно вводится радиус-вектор относительно выбранного центра.

Сложение, масштабирование и единичное направление

Линейные действия выполняются покоординатно. Для $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ имеем $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ и $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$. Геометрически последовательные перемещения складываются по правилу треугольника.

Например, после перемещения $p = (2, -1, 2)$ выполнено $q = (1, 2, 0)$. Итоговый вектор равен $a = p + q = (3, 1, 2)$. Сам маршрут состоит из двух участков; его длина обычно не равна длине итогового вектора. Здесь длины участков равны 3 и $\sqrt{5}$, а расстояние между начальной и конечной точками равно $\sqrt{14}$.

Для ненулевого a единичное направление равно $e = a/|a|$. Масштабирование на отрицательное число разворачивает направление, на положительное — сохраняет. Коллинеарность ненулевых векторов выражается равенством $a = \lambda b$. Эта запись надёжнее отношений координат, если некоторые координаты равны нулю.

Скалярное произведение выделяет продольную часть

В ортонормированной системе координат

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |a|\,|b| \cos\theta.$$

Результат — число. Для ненулевых векторов $\theta \in [0, \pi]$, и его косинус получается делением произведения на обе длины. Произведение симметрично, линейно по каждому аргументу, а $a \cdot a = |a|^2$.

Ортогональное разложение

Для $b \neq 0$ векторная проекция и остаток равны

$$a_{\parallel} = \frac{a \cdot b}{b \cdot b}\, b, \qquad a_{\perp} = a - a_{\parallel}.$$

Проверка $a_{\perp} \cdot b = 0$ показывает, что остаток действительно поперечен выбранному направлению.

Скалярная проекция равна $(a \cdot b)/|b|$; она может быть отрицательной. Векторная проекция содержит и величину, и направление. У нулевого вектора нет выделенного направления, поэтому формулы с делением на его длину не применяются.

Разбор A. Разложение результирующего перемещения

Возьмём $a = (3, 1, 2)$ и $p = (2, -1, 2)$. Имеем $a \cdot p = 6 - 1 + 4 = 9$, $p \cdot p = 9$. Поэтому $a_{\parallel} = p$, а $a_{\perp} = (1, 2, 0) = q$. Скалярное произведение $p \cdot q = 2 - 2 = 0$. Квадраты длин согласуются с теоремой Пифагора: $14 = 9 + 5$.

Работа постоянной силы определяется как $W = F \cdot s$, где s — перемещение. Например, при $F = (4, -2, 1)$ Н и $s = (1, 3, 2)$ м работа равна $4 - 6 + 2 = 0$ Дж. Нулевая работа не означает отсутствия силы: здесь она перпендикулярна суммарному перемещению.

Векторное произведение даёт нормаль и площадь

В ориентированном пространстве трёх измерений произведение $a \times b$ перпендикулярно обоим векторам, направлено по правилу правой руки и имеет длину $|a||b| \sin\theta$. В координатах

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Вторая координата содержит именно разность $a_3b_1 - a_1b_3$. Символическая запись через определитель помогает запомнить этот знак:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

При перестановке множителей направление меняется на противоположное. Векторное произведение равно нулю при зависимых векторах. Его длина является площадью параллелограмма, половина длины — площадью треугольника.

Разбор B. Треугольная рабочая область

Пусть третья точка $S = (2, 4, -1)$. Тогда $\overrightarrow{PS} = q = (1, 2, 0)$, а $\overrightarrow{PQ} = p = (2, -1, 2)$. Получаем

$$p \times q = (-4, 2, 5), \qquad |p \times q| = \sqrt{16 + 4 + 25} = 3\sqrt{5}.$$

Площадь треугольника PQS равна $3\sqrt{5}/2$. Две проверки нормали: $(-4, 2, 5) \cdot p = -8 - 2 + 10 = 0$ и $(-4, 2, 5) \cdot q = -4 + 4 = 0$.

В механике момент силы относительно центра равен $M = r \times F$. Для $r = (0{,}3, 0, 0)$ м и $F = (0, 20, 0)$ Н получается $M = (0, 0, 6)$ Н·м. Увеличение плеча в два раза увеличит момент в два раза; сила, параллельная плечу, даст нулевой момент.

Третье направление: объём и компланарность

Смешанное произведение $[a, b, c] = (a \times b) \cdot c$ является числом и совпадает с определителем строк из координат трёх векторов. Его модуль равен объёму параллелепипеда. Для тетраэдра с тремя рёбрами из общей вершины этот объём делится на шесть.

Разбор C. Проверка пространственной независимости

Добавим к p, q вектор $c = (0, 1, 1)$. Уже вычисленная нормаль даёт

$$[p, q, c] = (-4, 2, 5) \cdot (0, 1, 1) = 7.$$

Следовательно, три направления не лежат в одной плоскости. Объём параллелепипеда равен 7, тетраэдра — $7/6$. Если же взять $c = p + 2q$, смешанное произведение будет нулевым по линейности и перпендикулярности нормали к p, q.

При перестановке любых двух векторов знак смешанного произведения меняется. Циклическая перестановка знак сохраняет. Нулевое значение характеризует компланарность независимо от конкретной формы координатной записи.

Угол и ориентированная площадь в одной задаче

Пусть два плоских перемещения равны $u = (2, 1)$ и $v = (1, 3)$. Рассмотрим их как пространственные векторы с нулевой третьей координатой. Скалярное произведение равно 5, а третья координата векторного произведения равна $2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5$. Длины равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$, поэтому

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\theta = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Меньший угол между векторами равен $\pi/4$, площадь построенного на них параллелограмма — 5. При перестановке векторов косинус не меняется, а ориентированная площадь становится равной -5. Таким образом, две операции описывают разные характеристики одной пары направлений.

Для произвольных пространственных векторов действует тождество

$$|u \times v|^2 + (u \cdot v)^2 = |u|^2 |v|^2.$$

Оно следует из равенства $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ и верно также при нулевом векторе. В нашем случае $25 + 25 = 5 \cdot 10$. Это ещё один способ проверить длину вычисленной нормали, не раскрывая повторно все её координаты.

Если задача требует только проверить перпендикулярность, достаточно скалярного произведения. Для проверки коллинеарности в пространстве удобно векторное произведение. Для проверки, лежат ли три направления в одной плоскости, используют смешанное произведение. Нельзя заменить эти проверки друг другом: например, нулевое скалярное произведение ненулевых векторов означает прямой угол, а не одинаковое направление.

Проверка понимания

1. Почему длина маршрута из двух участков может превышать модуль их суммы?
2. Какое из трёх произведений следует выбрать для работы, нормали и объёма?
3. Найдите проекцию $(2, 3, 1)$ на направление $(1, 0, 1)$.
4. Вычислите момент $(0, 1, 0) \times (2, 0, 0)$ и объясните его знак.
5. Как проверить найденное векторное произведение без повторного вычисления всех координат?