ЛЕКЦИЯ 4

Вычислительная схема исключения неизвестных

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Последовательное исключение превращает связанные уравнения в цепочку простых условий. Та же техника выявляет свободные переменные и позволяет строить обратное преобразование.

Цели обучения

- Выполнять прямой и обратный ход исключения.
- Записывать всё множество решений при недостаточном ранге.
- Сопоставлять метод Гаусса и решение через обратную матрицу.

Устранить связи между неизвестными

В системе несколько неизвестных входят сразу в каждое уравнение. Идея исключения состоит в последовательном построении условий, содержащих всё меньше неизвестных. Последнее такое условие даёт одну величину; затем остальные восстанавливаются в обратном порядке.

Вычисления ведут с расширенной матрицей: свободный член преобразуется вместе со всей строкой. Если к коэффициентам применить операцию, а правую часть оставить прежней, новая система обычно перестанет быть равносильной исходной.

Какие операции сохраняют множество решений

Разрешены перестановка строк, умножение строки на ненулевое число и прибавление к ней кратной другой строки. Каждая операция обратима. Например, действие $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$ отменяется прибавлением $3R_1$. Поэтому ни одно решение не теряется и новое решение не появляется.

Умножение строки на ноль не является разрешённым шагом: уравнение превращается в тождество, восстановить его уже нельзя. Деление строки на выражение с параметром требует предварительного выделения случая, когда выражение равно нулю.

Ведущая позиция

В ступенчатой форме первый ненулевой элемент очередной ненулевой строки расположен правее первого ненулевого элемента предыдущей. Под каждой ведущей позицией стоят нули, полностью нулевые строки помещаются внизу.

Если выбранный ведущий элемент равен нулю, ищут ненулевой элемент ниже в том же столбце и переставляют строки. Если весь оставшийся столбец нулевой, переходят к следующему столбцу; этот столбец может соответствовать свободной переменной.

Полный расчёт: от таблицы к ответу

Разбор A. Исключение без больших дробей

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + z = 6, \\ 3x + y + z = 6. \end{cases}$$

После записи расширенной матрицы применим $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

Разделим вторую строку на -3, затем прибавим к третьей удвоенную новую вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

На этом прямой ход закончен. Обратный ход начинается с $2z = 2$, поэтому $z = 1$. Из $y - z = -2$ следует $y = -1$, затем $x + y - z = 0$ даёт $x = 2$. Проверка: $2 - 1 - 1 = 0$, $4 + 1 + 1 = 6$, $6 - 1 + 1 = 6$.

В процессе допустимо делить строку на ненулевое число: это не меняет её решений. Но определитель матрицы при этом изменяется. Если задача дополнительно требует найти определитель, масштабы строк нужно учитывать отдельно.

Как обнаруживаются несовместность и свобода выбора

Строка с нулевыми коэффициентами и ненулевой правой частью описывает невозможное равенство. Например, $(0, 0, 0 \mid -2)$ означает $0 = -2$. Любая такая строка делает всю систему несовместной. Строка $(0, 0, 0 \mid 0)$, напротив, только показывает избыточность одного ограничения.

Если противоречия нет, ведущие столбцы определяют зависимые неизвестные. Остальные неизвестные задаются произвольно. Их число равно разности между количеством неизвестных и рангом основной матрицы.

Разбор B. Два независимых параметра

После исключения система четырёх неизвестных приобрела вид

$$x + z - 2w = 1, \qquad y - z + w = 2.$$

Ведущие столбцы относятся к x, y, поэтому положим $z = s$, $w = t$. Тогда

$$x = 1 - s + 2t, \qquad y = 2 + s - t,$$

и полное множество решений удобно записать как

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Подстановка обеих свободных величин подтверждает равенства независимо от s, t. Числа $(1, 2, 0, 0)$ являются лишь одним частным решением, а не ответом всей задачи.

Разбор C. Избыточное условие меняет правую часть

Уравнения $x - y + 2z = 1$ и $2x - 2y + 4z = 2$ зависимы. Их решения: $y = s$, $z = t$, $x = 1 + s - 2t$. Если вторую правую часть заменить на 3, исключение даст $0 = 1$ и решений не будет. До преобразования эти случаи внешне отличаются всего одним числом, но множества решений принципиально различаются.

Однородная часть общего решения

Для системы $Ax = 0$ все правые части остаются нулевыми на каждом шаге. Поэтому противоречивая строка не возникает. При наличии свободных переменных решение представляет собой линейную комбинацию независимых векторов.

Например, $x - y + 2z = 0$ даёт

$$(x, y, z) = s(1, 1, 0) + t(-2, 0, 1).$$

Эти два вектора независимы: по второй и третьей координатам нулевая комбинация вынуждает $s = t = 0$. Они образуют фундаментальную систему решений.

Для неоднородной совместной системы любое решение можно представить как $x = x_p + x_h$, где $Ax_p = b$, $Ax_h = 0$. Чтобы проверить это утверждение в обратную сторону, вычтем частное решение из любого другого: $A(x - x_p) = b - b = 0$. Таким образом, найденные свободные направления описывают все варианты, а не только часть из них.

Матричный способ и обратное преобразование

Если A квадратная и обратимая, из $Ax = b$ получается $x = A^{-1}b$. Умножение выполняется слева, потому что именно тогда $A^{-1}A = E$. Такой подход удобен при нескольких правых частях с одной матрицей. Для одной системы обычно проще непосредственно выполнить исключение.

Обратную матрицу тоже можно построить исключением, преобразуя блок $(A \mid E)$. Если слева удаётся получить E, справа появится A^{-1}.

Разбор D. Обращение матрицы последовательными шагами

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Первый шаг — $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$. Далее делим R_2 на 3 и вычитаем из R_1 удвоенную новую R_2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right).$$

Следовательно, обратная матрица равна $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Для правой части $(4, -1)^T$ она даёт $(2, 1)^T$. Полученный ответ проверяется умножением исходной матрицы на столбец решения.

Проверка понимания

1. Почему любое преобразование коэффициентов должно затрагивать правую часть?
2. Что делать, если первый коэффициент выбранной строки равен нулю?
3. Решите $x + 2y - z = 3$, $2x + 4y - 2z = 6$ с двумя свободными переменными.
4. Как отличить свободную переменную от неизвестной, равной нулю?
5. Объясните, почему невозможность получить единичную матрицу слева в блоке $(A \mid E)$ связана с отсутствием обратной матрицы.