ЛЕКЦИЯ 7

Пространственная траектория и рабочая плоскость

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

В пространстве направление движения и нормаль поверхности выполняют разные роли. Их скалярное произведение определяет возможность пересечения и угол подхода.

Цели обучения

- Задавать плоскость точками или нормалью.
- Записывать прямую параметрически и через пересечение плоскостей.
- Исследовать пространственные пересечения, углы и расстояния.

Поверхность и направление движения

В плоскости одно линейное уравнение задаёт прямую. В трёхмерном пространстве одно нетривиальное линейное уравнение задаёт плоскость: остаются два независимых направления перемещения. Для прямой нужны либо точка и одно направление, либо два независимых линейных ограничения.

Это различие удобно видеть на модели инструмента, движущегося к рабочей поверхности. Поверхность задаётся нормалью, движение — направляющим вектором. Одна и та же тройка чисел играет разные роли в зависимости от того, какой объект ею описывается.

Построение рабочей плоскости по трём точкам

Пусть $A = (0, 0, 1)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (0, 1, 3)$. Соединяющие векторы равны $AB = (2, 0, 0)$, $AC = (0, 1, 2)$. Их векторное произведение $(0, -4, 2)$ ненулевое, поэтому точки неколлинеарны и задают единственную плоскость. Нормаль можно сократить до $n = (0, -2, 1)$.

Для произвольной точки $X = (x, y, z)$ условие $n \cdot (X - A) = 0$ даёт

$$\boxed{z - 2y - 1 = 0}.$$

Координата x отсутствует, значит, плоскость допускает любое перемещение вдоль оси Ox. Все три исходные точки удовлетворяют уравнению.

В общем случае плоскость через X_0 с нормалью $n = (A, B, C) \neq 0$ описывается равенствами

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Через три неколлинеарные точки эквивалентная запись получается из нулевого смешанного произведения:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если точки лежат на одной прямой, нормаль таким способом не определяется однозначно: через эту прямую проходит бесконечно много плоскостей.

Траектория с одним параметром

Прямая через r_0 с направлением $s \neq 0$ имеет вид $r = r_0 + ts$, $t \in \mathbb{R}$. Координатная запись:

$$x = x_0 + s_1 t, \qquad y = y_0 + s_2 t, \qquad z = z_0 + s_3 t.$$

Для одной точки значение параметра должно быть общим во всех трёх равенствах. Если все $s_i \neq 0$, можно исключить параметр и записать

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Нулевой компоненте направления соответствует постоянная координата, а не допустимое деление на ноль.

Разбор A. Прямая как пересечение двух плоскостей

Добавим к рабочей плоскости условие $x - y = 2$. Положив $y = t$, получаем $x = 2 + t$, $z = 1 + 2t$. Поэтому линия пересечения равна

$$r = (2, 0, 1) + t(1, 1, 2).$$

Нормали плоскостей $(0, -2, 1)$ и $(1, -1, 0)$ имеют векторное произведение $(1, 1, 2)$, совпадающее с найденным направлением. Если нормали параллельны, их пересечение уже не обязано быть прямой: плоскости могут совпадать или не пересекаться.

Достигает ли инструмент поверхности?

Подстановка $r = r_0 + ts$ в плоскость $n \cdot r + D = 0$ даёт

$$(n \cdot s)t + (n \cdot r_0 + D) = 0.$$

Это обычное линейное уравнение относительно t. Ненулевой коэффициент $n \cdot s$ обеспечивает единственное пересечение. При нулевом коэффициенте проверяют оставшееся число: ноль означает принадлежность всей прямой плоскости, ненулевое число — отсутствие общих точек.

Разбор B. Точка подхода к рабочей плоскости

Для $r = (1, -1, 3) + t(1, 1, -2)$ получаем

$$z - 2y - 1 = (3 - 2t) - 2(-1 + t) - 1 = 4 - 4t.$$

Следовательно, $t = 1$, а точка пересечения $(2, 0, 1)$. Если допустимо лишь $0 \le t \le 1/2$, конечный участок траектории не достигает поверхности, хотя бесконечная прямая пересекает её. Поэтому ограничения на параметр анализируют после решения уравнения.

Углы: что сравнивается со скалярным произведением

У двух прямых сравниваются направления, у двух плоскостей — нормали. Для меньших углов формулы имеют одинаковый вид:

$$\cos\varphi = \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1||s_2|}, \qquad \cos\psi = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}.$$

Параллельные нормали соответствуют параллельным или совпадающим плоскостям; ортогональные нормали — перпендикулярным плоскостям. Для плоскостей разбора A имеем $\cos\psi = 2/\sqrt{10}$.

Угол подхода к плоскости

Если $\alpha \in [0, \pi/2]$ — угол прямой с плоскостью, то

$$\sin\alpha = \frac{|n \cdot s|}{|n||s|}.$$

Угол с плоскостью дополняет острый угол с нормалью до $\pi/2$. Поэтому здесь используется синус, а не косинус.

В разборе B скалярное произведение равно -4, длины векторов — $\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}$. Значит, $\sin\alpha = 4/\sqrt{30}$. Знак -4 указывает выбранную ориентацию нормали, но не делает геометрический угол отрицательным.

Расстояние как поперечная составляющая

Для точки P и плоскости $n \cdot r + D = 0$

$$d = \frac{|n \cdot P + D|}{|n|}, \qquad H = P - \frac{n \cdot P + D}{|n|^2} n.$$

Точка H лежит в плоскости и является ортогональной проекцией P. Для $P = (1, 2, 0)$ и $z - 2y - 1 = 0$ числитель без модуля равен -5. Поэтому $d = \sqrt{5}$, $H = P + n = (1, 0, 1)$. Вектор $P - H = (0, 2, -1)$ параллелен нормали.

Расстояние до прямой с начальной точкой r_0 и направлением s выражается как

$$d(P, l) = \frac{|(P - r_0) \times s|}{|s|}.$$

Числитель — площадь параллелограмма, а деление на длину основания оставляет его высоту. Например, расстояние от $(2, 3, 4)$ до оси Oz равно $\sqrt{13}$: координата вдоль оси на него не влияет.

Почему непараллельные прямые могут не пересечься

В пространстве есть скрещивающиеся прямые. Для непараллельных направлений условие нахождения двух прямых в одной плоскости имеет вид

$$(r_2 - r_1) \cdot (s_1 \times s_2) = 0.$$

Если оно нарушено, прямые не пересекаются. Например, $l_1 = (t, 0, 1)$, $l_2 = (0, 1 + s, s)$. Для равенства координат y нужен $s = -1$, а для равенства z — $s = 1$, что невозможно. Направления непараллельны, поэтому прямые скрещиваются.

Проверка понимания

1. Сколько независимых линейных условий обычно нужно для задания прямой в пространстве?
2. Составьте плоскость через $(1, 1, 2)$ с нормалью $(2, 0, -1)$.
3. Найдите условия, при которых вся траектория лежит в рабочей плоскости.
4. Почему проверка пересечения отрезка требует ограничить параметр?
5. Объясните разницу между расстоянием до плоскости и координатой по её нормали со знаком.