ЛЕКЦИЯ 2

Матрицы как язык преобразования координат

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Матричная запись связывает набор входных величин с набором выходных. Композиция, обратное преобразование и ранг описывают разные стороны этой связи.

Цели обучения

- Согласовывать размеры и порядок матричных операций.
- Строить обратную матрицу и проверять её действие.
- Определять ранг через миноры и ступенчатую форму.

Входные и выходные координаты

Рассмотрим простую линейную модель двух управляющих величин q_1, q_2:

$$x = q_1 + 2q_2, \qquad y = -q_1 + q_2.$$

Её коэффициенты удобно объединить в матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, а вход и выход — в столбцы. Тогда $p = Tq$. Например, вход $q = (2, 1)^T$ даёт выход $p = (4, -1)^T$. Такая запись используется здесь как учебная линейная модель; она показывает общий принцип преобразования наборов чисел.

Каждый столбец T описывает отклик на один единичный вход. Первый столбец соответствует $q = (1, 0)^T$, второй — $q = (0, 1)^T$. Поэтому произвольный выход является линейной комбинацией столбцов с коэффициентами q_1, q_2.

Размер и элементарные действия

Матрица размера $m \times n$ содержит m строк и n столбцов. В обозначении a_{ij} индекс i выбирает строку, j — столбец. Равенство двух матриц требует совпадения размеров и соответствующих элементов. Нулевая матрица обозначается O; у единичной матрицы E диагональные элементы равны единице, остальные нулю.

Сумма допустима при одинаковых размерах и вычисляется поэлементно. При умножении на число умножаются все элементы. Так, если

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

то $U + 2V = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Коэффициент 2 относится и к отрицательному элементу -2, поэтому левый нижний элемент результата равен -4.

Транспонирование меняет строки и столбцы местами. Для A размера $m \times n$ матрица A^T имеет размер $n \times m$. В частности, строка и столбец с одними и теми же числами являются разными матрицами.

Почему произведение считается по строке и столбцу

Пусть $y = Bq$, а затем $z = Ay$. Подстановка выражений для компонент y в формулы для z приводит к коэффициентам

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Индекс k перечисляет промежуточные величины. Поэтому число столбцов A обязано совпадать с числом строк B. Если размеры равны $m \times n$ и $n \times r$, произведение имеет размер $m \times r$.

Разбор A. Прямоугольная композиция

Для

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

произведение MN имеет размер 2×2. Например, его первый элемент равен $1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -2$, а правый нижний — $2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 5$. Полный результат:

$$MN = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Умножение соответствующих элементов таблиц здесь не имеет нужного смысла: произведение описывает суммирование по промежуточным координатам.

Порядок действий имеет значение

В композиции ABq сначала действует B, затем A. Ассоциативность $A(Bq) = (AB)q$ позволяет менять скобки, но не порядок множителей.

Разбор B. Поворот до преобразования и после него

Матрица $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ переводит $(x, y)^T$ в $(-y, x)^T$, то есть поворачивает вектор на $90°$ против часовой стрелки. Для введённой выше T

$$RT = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad TR = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы различаются. При входе $(1, 0)^T$ первый порядок даёт $(1, 1)^T$, второй — $(2, 1)^T$. Таким образом, некоммутативность имеет конкретный геометрический смысл.

При согласованных размерах действуют распределительные законы, например $A(B + C) = AB + AC$. Для транспонирования произведения порядок меняется: $(AB)^T = B^T A^T$. Кроме того, $E_m A = A E_n = A$.

Обратная задача: восстановить вход

Обратная матрица T^{-1} должна удовлетворять двум равенствам $T^{-1}T = TT^{-1} = E$. Она существует для квадратной матрицы точно при ненулевом определителе. Если преобразование сводит два независимых входа к одному направлению, однозначно восстановить все входы невозможно.

Для второго порядка

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

В общем случае используют $A^{-1} = \operatorname{adj} A / \det A$, где присоединённая матрица является транспонированной таблицей алгебраических дополнений. Транспонирование необходимо для тождества $A \operatorname{adj} A = (\det A)E$.

Разбор C. Проверка обратного преобразования

Для T определитель равен 3, следовательно,

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получен исходный вход. Дополнительная проверка умножением даёт $TT^{-1} = E$. Обратное преобразование композиции выполняется в обратном порядке: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ранг и количество независимых каналов

Ранг равен максимальному числу линейно независимых столбцов и одновременно строк. Его можно определить как наибольший порядок ненулевого минора. Минор порядка r выбирается по любым r строкам и r столбцам; они не обязаны быть соседними.

Всегда $0 \leq \operatorname{rank} A \leq \min(m, n)$. Ранг нулевой матрицы равен нулю. Для квадратной матрицы порядка n полный ранг n равносилен обратимости. Для прямоугольной матрицы ранг по-прежнему определён, хотя обычной двусторонней обратной матрицы нет.

Разбор D. Независимые и повторяющиеся строки

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Третья строка равна сумме удвоенной первой и второй, поэтому $\operatorname{rank} K \le 2$. Верхний левый минор второго порядка равен 1, значит, $\operatorname{rank} K = 2$. Если последний элемент заменить на s, операция $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 - R_2$ даст строку $(0, 0, s-3)$. При $s \neq 3$ ранг станет равным трём.

Строковые преобразования сохраняют ранг. Поэтому после приведения к ступенчатому виду достаточно посчитать ведущие позиции. До преобразования число ненулевых строк может быть больше ранга, как в этом примере.

Проверка понимания

1. Какой физический смысл имеет столбец линейного преобразования?
2. При размерах $A : 3 \times 2$, $B : 2 \times 4$ укажите размер AB и объясните, существует ли BA.
3. Проверьте $(RT)^{-1} = T^{-1}R^{-1}$ для матриц лекции.
4. Может ли ненулевая матрица иметь нулевой квадрат? Проверьте $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Почему добавление зависимого столбца не увеличивает ранг?