ЛЕКЦИЯ 1

Определитель: масштаб, ориентация, вырождение

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Определитель показывает, сохраняет ли линейная модель независимые направления. Его вычисление можно связать с площадью, объёмом и обратимостью преобразования.

Цели обучения

- Вычислять определители порядков два и три разными способами.
- Различать минор, алгебраическое дополнение и элемент матрицы.
- Обосновывать преобразования и распознавать вырожденные случаи.

Два направления: сохраняется ли площадь?

Представим, что координатная модель заменяет единичные направления плоскости векторами $p = (4, 2)$ и $q = (-1, 1)$. Единичный квадрат переходит в параллелограмм. По его площади можно понять, во сколько раз преобразование меняет площади, а по взаимному расположению сторон — сохраняется ли ориентация.

Координаты новых направлений запишем столбцами:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 4 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 6.$$

Площадь образа единичного квадрата равна 6. Если поменять направления местами, геометрическая площадь останется той же, но ориентированная площадь изменит знак. Если оба направления станут коллинеарными, параллелограмм превратится в отрезок и площадь будет нулевой. Эти три наблюдения объясняют многие алгебраические свойства определителя.

От таблицы коэффициентов к числу

Определитель сопоставляется квадратной матрице. Матрица содержит все коэффициенты преобразования, тогда как определитель является одним числом. Порядок определителя равен количеству строк, совпадающему с количеством столбцов. Для прямоугольной таблицы обычный определитель всей матрицы не вводится.

Для второго порядка правило записывается так:

Основная формула

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Произведение на главной диагонали берётся со знаком плюс, на побочной — со знаком минус. Вертикальные черты здесь означают определитель, а не модуль каждого элемента.

Если столбцы пропорциональны, например $(b, d) = t(a, c)$, получаем $ad - bc = a(tc) - (ta)c = 0$. Обратно, нулевой определитель в размерности два означает зависимость столбцов. Таким образом, $\det A \neq 0$ показывает, что два направления позволяют независимо изменять две координаты.

Разбор A. Значение параметра, при котором теряется направление

Рассмотрим $B(k) = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Имеем $\det B(k) = 6 - k$. При $k = 6$ второй столбец втрое больше первого, и выходы преобразования лежат на одной прямой. При остальных k столбцы независимы. Знак положителен при $k < 6$, отрицателен при $k > 6$. Переход через ноль отделяет две разные ориентации.

Три измерения и правило Саррюса

В пространстве модуль определителя трёх столбцов равен объёму построенного на них параллелепипеда. Знак снова отвечает за ориентацию. Для матрицы $A = (a_{ij})$ порядка три

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

В каждом произведении участвует по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Правило содержит шесть произведений и применяется именно к порядку три. Дописывание столбцов и подсчёт диагоналей для матрицы порядка четыре уже не даёт её определитель.

Разбор B. Отрицательный определитель и положительный объём

Для матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

положительная группа произведений даёт $6+0+0$, отрицательная — $0+1+8$. Поэтому $\det C = -3$, а объём параллелепипеда равен 3. Отрицательного геометрического объёма здесь нет: отрицательна ориентированная величина.

Локальный элемент и его вклад в определитель

Чтобы вычислять определители без длинного перечисления произведений, выделяют вклад выбранной строки или столбца. Удалим строку i и столбец j. Определитель оставшейся квадратной таблицы называется **минором** M_{ij}. Вклад элемента определяется **алгебраическим дополнением**

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Мы используем букву C_{ij}, чтобы отличать дополнение от элемента a_{ij}. Знаки дополнений чередуются: позиции $(1,1), (1,3), (2,2)$ положительны, позиции $(1,2), (2,1)$ отрицательны.

Для фиксированной строки i и фиксированного столбца j соответственно

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}, \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}.$$

Это два самостоятельных способа разложения. Выбранный индекс остаётся фиксированным; нельзя одновременно менять строку и столбец произвольно.

У матрицы C из разбора B минор первой позиции равен $3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1$. Для позиции $(1,2)$ минор равен 1, а дополнение равно -1. Поэтому разложение первой строки даёт $2(-1) + 1(-1) + 0 = -3$. Оно подтверждает результат Саррюса и отдельно проверяет знаки.

Преобразования как способ сократить вычисления

Перестановка двух строк меняет знак определителя. Умножение одной строки на c умножает его на c. Прибавление к строке кратной другой строки сохраняет значение. Последнее утверждение следует из линейности по строке: дополнительное слагаемое содержит две зависимые строки и равно нулю.

Если строка нулевая или две строки пропорциональны, определитель равен нулю. Транспонирование не меняет его значения, поэтому те же правила действуют для столбцов. Для верхней треугольной матрицы остаётся произведение элементов главной диагонали.

Разбор C. Получение треугольной таблицы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вычитаем удвоенную первую строку из второй, утроенную первую — из третьей:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

После $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ получаем диагональные элементы $1, 3, -1$, так что $D = -3$. Все использованные действия сохраняли определитель. Если бы строку предварительно делили на 3, пришлось бы отдельно учитывать этот множитель.

Что именно можно вынести за знак определителя

Множитель из одной строки выносится один раз. Если же вся матрица порядка n умножена на число c, масштабируются все n строк, поэтому $\det(cA) = c^n \det A$. Например, при $\det A = 6$ для матрицы порядка два имеем $\det(3A) = 54$, а не 18.

Также $\det(AB) = \det A \det B$ для квадратных матриц одного порядка. Геометрически масштабы последовательных преобразований перемножаются. Однако для суммы аналогичной формулы нет: обычно $\det(A+B) \neq \det A + \det B$. Уже для $A = B = E_2$ левая часть равна 4, а правая — 2.

Проверка понимания

1. Почему определитель может быть отрицательным, а площадь образа квадрата — нет?
2. Что происходит с независимостью столбцов при $\det A = 0$?
3. Найдите дополнение позиции $(2, 1)$ матрицы из разбора B.
4. Вычислите $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, затем проверьте действие перестановки столбцов.
5. Какие из действий сохраняют значение: $R_1 \leftarrow R_1 + 5R_2$, $R_1 \leftarrow 5R_1$, $R_1 \leftrightarrow R_2$? Обоснуйте ответ.