ЛЕКЦИЯ 6

Плоская траектория: направление и положение

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Точка и направление задают прямую, а нормаль даёт удобное условие принадлежности. Эти представления позволяют находить пересечения, углы и отклонения от заданной траектории.

Цели обучения

- Переходить между уравнениями одной прямой.
- Определять взаимное положение и угол между прямыми.
- Находить расстояние до прямой и основание перпендикуляра.

Задание движения двумя точками

Пусть траектория проходит через $A = (-1, 2)$ и $B = (3, 0)$. Вектор $B - A = (4, -2)$ показывает направление. Все точки прямой можно записать как $A + \tau(B - A)$, $\tau \in \mathbb{R}$. При $0 \le \tau \le 1$ получится только отрезок AB; ограничение параметра важно, когда речь идёт о конечном участке движения.

Направление допускает любое ненулевое масштабирование. Используя $s = (2, -1)$, получим

$$x = -1 + 2t, \qquad y = 2 - t.$$

Теперь концу B соответствует $t = 2$. Геометрическая прямая та же, но числовая шкала параметра изменилась. Без дополнительного указания параметр не обязательно является временем.

Нормаль превращает направление в уравнение

Нормальный вектор $n = (A, B)$ перпендикулярен прямой. Если (x_0, y_0) — её точка, то любой соединяющий вектор $(x - x_0, y - y_0)$ ортогонален n. Отсюда

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

После раскрытия скобок возникает общее уравнение $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2>0$. Нормаль должна быть ненулевой: иначе запись задаёт либо всю плоскость, либо пустое множество.

Для выбранного направления $(2,-1)$ подходит нормаль $(1,2)$. Через $A=(-1,2)$ получаем $(x+1)+2(y-2)=0$, то есть

$$\boxed{x+2y-3=0}.$$

Подстановка второй точки B даёт $3+0-3=0$. Обе точки лежат на полученной прямой, а нормаль ортогональна направлению.

Одна линия в нескольких записях

Из параметрических уравнений при ненулевых компонентах направления выводится каноническая форма

$$\frac{x-x_0}{s_1}=\frac{y-y_0}{s_2}.$$

Для рассматриваемой прямой это $(x+1)/2=(y-2)/(-1)$. При нулевой компоненте направления дробь с нулевым знаменателем не пишут. Например, направление $(0,1)$ даёт вертикальную прямую $x=x_0$.

Если $B\neq 0$, общее уравнение разрешается относительно y: $y=kx+b$, где $k=-A/B$, $b=-C/B$. Здесь k — тангенс угла направления с осью Ox. Наш пример имеет вид $y=-x/2+3/2$. Он пересекает оси в точках $(3,0)$ и $(0,3/2)$, поэтому допустима также запись $x/3+y/(3/2)=1$.

Форма по двум точкам без деления получается из нулевого определителя направлений:

$$(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0.$$

Она применима к любой паре различных точек, включая вертикальные и горизонтальные прямые. Если точки совпадают, единственное направление определить нельзя.

Пересечение и взаимное положение

Две прямые с нормалями (A_1,B_1), (A_2,B_2) имеют единственную общую точку при $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$. Её координаты находят решением системы уравнений прямых.

Разбор A. Точка пересечения двух маршрутов

Для $x+2y=3$ и $x+y=2$ вычитание второго равенства из первого даёт $y=1$, затем $x=1$. Общая точка $H=(1,1)$ удовлетворяет обеим записям.

Нулевой определитель нормалей означает, что они пропорциональны. Прямые тогда параллельны или совпадают. Для совпадения должны быть пропорциональны все три коэффициента, включая свободный член. Уравнения $x+2y-3=0$ и $2x+4y-6=0$ задают одну прямую, а $2x+4y-14=0$ — другую параллельную.

Угол и построение перпендикуляра

Меньший угол между двумя прямыми принадлежит $[0, \pi/2]$. По нормалям

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Модуль нужен потому, что замена нормали на противоположную не меняет прямую. Для маршрутов разбора A косинус равен $3/\sqrt{10}$. Если оба угловых коэффициента конечны, можно также использовать

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$$

при ненулевом знаменателе. При $1 + k_1k_2 = 0$ прямые перпендикулярны; делить на ноль не требуется, достаточно указать угол $\pi/2$.

Разбор B. Перпендикуляр через внешнюю точку

Через $P = (2, 3)$ проведём прямую, перпендикулярную $x + 2y - 3 = 0$. Её направление совпадает с нормалью $(1, 2)$ исходной прямой, а нормаль можно взять $(2, -1)$. Уравнение:

$$2(x - 2) - (y - 3) = 0, \qquad 2x - y - 1 = 0.$$

Оно проходит через $H = (1, 1)$, так что H является основанием перпендикуляра.

Отклонение от прямой и проекция точки

Расстояние от точки $P = (p_1, p_2)$ до прямой равно

$$d = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

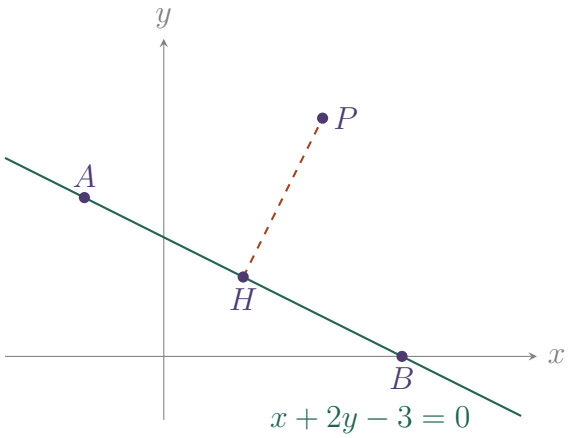
Числитель — модуль скалярного произведения вектора от любой точки прямой до P на нормаль. Деление на длину нормали превращает его в длину ортогональной проекции.

Координаты ближайшей точки

$$H = P - \frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{A^2 + B^2}(A, B).$$

Вектор $P - H$ направлен по нормали, а подстановка H в уравнение прямой даёт ноль. Эти два свойства определяют основание перпендикуляра.

Для $P = (2, 3)$ числитель без модуля равен 5, квадрат длины нормали тоже равен 5. Поэтому $H = (2, 3) - (1, 2) = (1, 1)$, а $d = \sqrt{5}$.



Для параллельных прямых сначала приводят коэффициенты нормали к одному виду. В примере $x + 2y - 3 = 0$, $2x + 4y - 14 = 0$ второе уравнение делится на 2. Расстояние после нормировки равно $|7 - 3|/\sqrt{5} = 4/\sqrt{5}$.

Проверка понимания

1. Чем прямая отличается от отрезка в параметрической записи?
2. Составьте уравнение через $(0, 4)$, $(2, 1)$ двумя способами.
3. Почему одних пропорциональных нормалей недостаточно для совпадения?
4. Как меняется формула расстояния при умножении уравнения на -5?
5. Найдите отражение точки P относительно прямой, используя $P_{\text{new}} = 2H - P$.