ЛЕКЦИЯ 9

Малые изменения и стандартные предельные модели

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Замечательные пределы связывают тригонометрические, логарифмические и показательные выражения с простыми степенями. Эквивалентности сохраняют главный вклад, если применены в подходящей структуре.

Цели обучения

- Использовать оба замечательных предела с изменёнными аргументами.
- Сравнивать порядки бесконечно малых величин.
- Распознавать потерю точности при вычитании главных частей.

Один масштаб для разных функций

Вблизи нуля многие нелинейные выражения ведут себя как простые степени. Например, $\sin h$ имеет тот же главный линейный масштаб, что и h, а $1-\cos h$ — квадратичный масштаб $h^2/2$. Такое сравнение позволяет исследовать отношение функций, даже если обычная подстановка даёт неопределённость.

Аргументы тригонометрических функций в этой лекции измеряются в радианах. При другой единице измерения стандартные коэффициенты изменяются. Это не формальность: длина дуги единичного круга равна числовому значению угла именно в радианах.

Геометрический источник первого предела

Для $0 < h < \pi/2$ сравнение треугольника, сектора и внешнего треугольника в единичном круге приводит к $\sin h < h < \tan h$. Отсюда

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1.$$

Обе границы стремятся к единице при $h \to 0+$. Отношение чётное, поэтому тот же предел получается слева:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1}.$$

Из этой формулы следуют $\tan h/h \to 1$ и, после применения тождества половинного угла,

$$\frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

В первом случае добавляется деление на $\cos h \to 1$; во втором становится видна квадратная степень малой величины.

Разбор A. Неодинаковые аргументы

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin 7h}{\sin 2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin 7h}{7h}\,\frac{2h}{\sin 2h}\,\frac{7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Подстановка стандартного предела требует согласовать аргумент синуса со знаменателем. Коэффициенты 7 и 2 не исчезают: они остаются в ответе как отношение масштабов.

Разбор B. Квадратичный числитель

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos 3h}{h\tan 2h} = \frac{9}{4}.$$

Действительно, числитель имеет главный член $9h^2/2$, знаменатель — $2h^2$. Нельзя заменять $1-\cos 3h$ величиной $3h$: у него другой порядок малости.

Множество слабых изменений и число e

Второй замечательный предел можно представить как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e.$$

Вторая запись относится к положительному основанию $1+u$. Значение e возникает, когда множитель стремится к единице, а число повторений растёт согласованным образом.

Если a, b постоянны, то $(1+ah)^{b/h} \to e^{ab}$. При $a \neq 0$ достаточно представить выражение как $((1+ah)^{1/(ah)})^{ab}$; при $a = 0$ оно равно единице. Поэтому

$$\lim_{h\to 0}(1-4h)^{2/h} = e^{-8}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = e^{6}.$$

Форма 1^∞ сама по себе не определяет ответ. Важно произведение малого отклонения основания от единицы и растущего показателя.

Логарифмирование раскрывает степенную зависимость

Для положительного $F(h)$ можно исследовать $y = F(h)^{G(h)}$ через $\ln y = G(h)\ln F(h)$. Если логарифм стремится к L, то $y \to e^L$. Из второго замечательного предела получаем

$$\frac{\ln(1+u)}{u} \longrightarrow 1, \qquad \frac{e^u - 1}{u} \longrightarrow 1.$$

Для второго соотношения можно в первом положить $u = e^t - 1$ и перейти к обратному отношению. При основании $a > 0$, $a \neq 1$, аналогично $(a^h - 1)/h \to \ln a$.

Разбор C. Тригонометрическое основание степени

Пусть $y = (1 + \sin h)^{1/h}$. Основание положительно для достаточно малых h. Тогда

$$\ln y = \frac{\ln(1+\sin h)}{\sin h}\,\frac{\sin h}{h} \longrightarrow 1.$$

Следовательно, $y \to e$. Здесь последовательно использованы два базовых предела, а не готовая формула с линейным основанием.

Эквивалентность и порядок малости

Пусть $\alpha, \beta \to 0$, причём рассматриваемое отношение определено вблизи предельной точки. Запись $\alpha \sim \beta$ означает $\alpha/\beta \to 1$. Если $\alpha/\beta \to 0$, то α имеет более высокий порядок малости; это обозначают $\alpha = o(\beta)$.

Основные модели вблизи нуля

$$\begin{aligned} \sin h &\sim h, & \tan h &\sim h,\\ \ln(1+h) &\sim h, & e^h - 1 &\sim h,\\ 1 - \cos h &\sim h^2/2, & (1+h)^a - 1 &\sim ah \quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

Во всех заменах малым должен быть весь внутренний аргумент; основание вещественной степени предполагается положительным.

При замене множителей произведения или частного на эквивалентные отношение исходного и нового выражений стремится к единице. Поэтому их конечные пределы совпадают, если такой предел существует. Например,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+5h)}{\sqrt{1+2h}-1} = \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h} = 5.$$

Знаменатель здесь эквивалентен h, поскольку показатель степени равен $1/2$, а внутреннее отклонение — $2h$.

Когда главный вклад уничтожается

В разности две эквивалентные главные части могут сократиться. Тогда замена только первым приближением теряет существенную информацию. Рассмотрим

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1 - h/2}{h^2}.$$

Формула $\sqrt{1+h}-1 \sim h/2$ здесь недостаточна. Выполним точные преобразования:

$$\sqrt{1+h}-1-\frac{h}{2} = \frac{h}{\sqrt{1+h}+1}-\frac{h}{2}$$
$$= \frac{h(1-\sqrt{1+h})}{2(\sqrt{1+h}+1)} = -\frac{h^2}{2(\sqrt{1+h}+1)^2}.$$

После деления на h^2 получаем $L = -1/8$. Ненулевой результат возникает именно из следующего, квадратичного вклада.

Для приближения $\sin h \approx h$ можно оценить относительную ошибку непосредственно из геометрического неравенства: при $0 < |h| < \pi/2$

$$\frac{|\sin h - h|}{|h|} \le 1 - \cos h.$$

Правая часть стремится к нулю. Такая оценка уточняет смысл малой ошибки и показывает, почему утверждение не относится к произвольным большим углам.

Проверка понимания

1. Найдите предел $\sin 5h / \tan 3h$ при $h \to 0$.
2. Вычислите $\lim_{h\to 0}(1+2h)^{-3/h}$.
3. Почему $1-\cos h$ не эквивалентно h?
4. Найдите $\lim_{h\to 0}(e^{4h}-1)/\ln(1+2h)$.
5. Объясните, почему точное сопряжение сработало в задаче с уничтожением линейных членов.