ЛЕКЦИЯ 8

Предельное поведение: от наблюдения к доказательству

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Приближение аргумента к выбранному значению требует контроля всех близких допустимых точек. Предел устанавливается определением, теоремами или точными преобразованиями.

Цели обучения

- Формулировать предел через требуемую точность.
- Различать односторонние пределы, непрерывность и бесконечный рост.
- Выбирать алгебраический способ раскрытия неопределённости.

Предсказание в точке, где формула не работает

Функция $r(x) = (x^3 - 8)/(x - 2)$ не определена при $x = 2$. Тем не менее её значения при близких аргументах могут приближаться к вполне определённому числу. Разложение кубов при $x \neq 2$ даёт $r(x) = x^2 + 2x + 4$, поэтому ожидаемое предельное значение равно 12.

Задача о пределе не требует вычислять запрещённую дробь $0/0$. Она требует выяснить, как ведёт себя формула при допустимых аргументах вблизи точки. Если дополнительно определить $r(2) = 12$, получится непрерывное продолжение; выбор $r(2) = 5$ оставит тот же предел, но нарушит непрерывность.

Точность результата и точность аргумента

Пусть a — предельная точка области определения D_f. Равенство $\lim_{x \to a} f(x) = L$ означает следующее: для каждой требуемой точности $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что

$$x \in D_f, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Условие должно выполняться для всех допустимых x внутри выбранной проколотой окрестности. Отдельные удачные значения или несколько чисел из таблицы не составляют доказательства.

Разбор A. Явный выбор размера окрестности

Для $f(x) = 4x - 3$ при $x \to 2$ предполагаемый предел равен 5. Имеем $|f(x) - 5| = 4|x - 2|$. Если задано $\varepsilon > 0$, достаточно выбрать $\delta = \varepsilon/4$. Тогда $0 < |x - 2| < \delta$ влечёт $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

В этой модели допустимая погрешность аргумента в четыре раза меньше требуемой погрешности результата. Определение предела превращает такое рассуждение о точности в универсальное математическое условие.

Сторона приближения и область определения

Для левого предела используются аргументы $x < a$, для правого — $x > a$. Если область содержит точки сколь угодно близко с обеих сторон, двусторонний конечный предел существует ровно при совпадении конечных односторонних пределов.

Пусть $f(x) = 2 + x$ при $x < 0$ и $f(x) = 3 - x$ при $x \geq 0$. Тогда левый предел в нуле равен 2, правый — 3. Единого предела нет. Изменение значения ровно в нуле не устраняет это расхождение.

Для $\sqrt{1 - x}$ около $x = 1$ допустимы только аргументы слева. Поэтому нужно учитывать область определения и не требовать правого предела там, где функция вообще не задана. В дальнейшем это различие важно и для производных на концах промежутков.

Теоремы, позволяющие работать с выражениями

Если $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ и оба числа конечны, то сумма стремится к $A + B$, произведение — к AB, постоянный множитель выносится за знак предела. Для отношения требуется $B \neq 0$: тогда $f/g \to A/B$.

Предел единственен. Функция с конечным пределом ограничена в некоторой достаточно малой проколотой окрестности. Если $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, а обе крайние функции стремятся к одному числу, то к нему стремится и средняя функция.

Разбор B. Оценка без вычисления колеблющейся функции

При $x \neq 0$ выполнено $1 \leq 2 + \sin(1/x) \leq 3$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{3} \leq \frac{x^2}{2 + \sin(1/x)} \leq x^2.$$

При $x \to 0$ обе границы стремятся к нулю, поэтому среднее выражение тоже стремится к нулю. Предел самого синуса не нужен. Важны ограниченность знаменателя и его отделённость от нуля.

Когда допустима подстановка

Непрерывность в a означает, что функция определена в a и её предел совпадает с $f(a)$. Для полиномов подстановка допустима всегда; для рациональных функций — если знаменатель в точке ненулевой.

Например, $\lim_{x\to -1}(x^2+4)/(x+3) = 5/2$. Если же подстановка приводит к $0/0$, правило о частном пока не применимо: необходимо преобразовать выражение.

Устранение неопределённости точным преобразованием

Разбор C. Общий множитель

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12.$$

Равенство дроби и многочлена используется только при $x \neq 2$. Этого достаточно для предела, потому что сама точка исключена из его определения.

Разбор D. Сопряжённое выражение

Для $h \to 0$ рассмотрим

$$\frac{\sqrt{9+2h}-3}{h} = \frac{(9+2h)-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \frac{2}{\sqrt{9+2h}+3}.$$

Последняя функция непрерывна в нуле, её значение равно $1/3$. Умножение на сопряжённое выражение заменяет разность корней точной разностью их квадратов.

Поведение вдали от начала координат

Условие $x \to +\infty$ означает, что аргумент превышает любой фиксированный порог. Для конечного предела L требуется: для всякого $\varepsilon > 0$ существует R, после которого $|f(x) - L| < \varepsilon$ для всех допустимых $x > R$.

Рациональные функции сравнивают по старшим степеням. Например,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-2x}{2x^3+7} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5-2/x^2}{2+7/x^3} = \frac{5}{2}.$$

Меньшая степень числителя даёт ноль; при большей степени нужно дополнительно исследовать знак и направление ухода аргумента.

Разбор E. Разность двух растущих выражений

$$\sqrt{t^2+4t}-t = \frac{4t}{\sqrt{t^2+4t}+t} = \frac{4}{\sqrt{1+4/t}+1} \quad (t>0).$$

Поэтому предел при $t \to +\infty$ равен 2. Условие $t > 0$ важно: при вынесении t^2 из корня возникает $|t|$, а не всегда t. При $t \to -\infty$ исходная разность растёт к $+\infty$, и ответ уже другой.

Бесконечный предел не является действительным числом. Например, $1/(x-1)^2 \to +\infty$ при $x \to 1$, поскольку знаменатель положителен и становится сколь угодно малым.

Записи $0/0$, $\infty - \infty$, ∞/∞ описывают ситуацию, требующую анализа, но не готовый результат.

Как доказать бесконечный рост

Утверждение $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$ означает: для каждого $M > 0$ существует проколотая окрестность, в которой все допустимые значения $f(x)$ превышают M. Это требование к величине результата, а не к существованию числового значения «в бесконечности».

Для $f(x) = 1/(x-1)^2$ можно выбрать $\delta = 1/\sqrt{M}$. Тогда из $0 < |x-1| < \delta$ следует $(x-1)^2 < 1/M$, то есть $f(x) > M$. Квадрат делает оба односторонних предела положительными бесконечными.

Для $g(x) = 1/(x-1)$ картина другая: справа значения положительны и растут без границ, слева отрицательны и убывают без границ. Поэтому нельзя писать один двусторонний предел $+\infty$ или $-\infty$. Сравнение этих двух функций показывает, почему при делении на малую величину нужно проверять не только её модуль, но и знак.

Наконец, ограниченность не гарантирует существования предела. Например, $\sin(1/x)$ при $x \to 0$ остаётся между -1 и 1, но вдоль подходящих последовательностей принимает то 1, то -1. В разборе B предел появился благодаря множителю порядка x^2, который подавил эти колебания.

Проверка понимания

1. Почему таблица близких значений не заменяет определения предела?
2. Подберите δ для $f(x) = 7x + 1$ в точке $x = 1$.
3. Найдите $\lim_{x \to 3} (x^3 - 27)/(x - 3)$.
4. Вычислите $\lim_{h \to 0} (\sqrt{16 + h} - 4)/h$.
5. При каком c функция x^2 при $x \le 1$, $2x + c$ при $x > 1$ непрерывна в точке соединения?