ЛЕКЦИЯ 10

# Локальная чувствительность и скорость изменения

**Преподаватель: Бауыржан Дербісалы**

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

**Тип лекции:** теоретическая лекция с разбором задач.

**Основная идея**

Производная переводит малое изменение входа в главный линейный вклад изменения выхода. Её вычисление опирается на структуру выражения и правила для составляющих функций.

### Цели обучения

- Объяснять производную через секущую, касательную и скорость.
- Применять таблицу, правила произведения и частного.
- Разбирать несколько уровней сложной функции.

## От средней скорости к локальному закону

Если положение задано функцией $q(t)$, отношение $[q(t+h)-q(t)]/h$ описывает среднюю скорость на промежутке между двумя моментами. При уменьшении $h$ мы уточняем масштаб наблюдения. Если отношение стремится к конечному числу, оно характеризует изменение непосредственно в момент $t$.

**Определение производной**

Производная функции $f$ в точке $a$ — конечный предел

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Для внутренней точки области определения должны совпадать пределы справа и слева. Производная имеет размерность «единица значения функции на единицу аргумента».

### Разбор A. Движение по одной координате

Пусть $q(t) = t^3 - 2t + 1$. Раскрывая куб, получаем

$$\frac{q(t+h) - q(t)}{h} = 3t^2 + 3th + h^2 - 2, \qquad q'(t) = 3t^2 - 2.$$

В момент $t = 1$ координата равна нулю, а скорость равна 1. Это разные характеристики: положение сообщает, где находится точка, производная — как меняется её положение. Отрицательная скорость означает движение в сторону уменьшения координаты, а не отрицательное пройденное расстояние.

Геометрически разностное отношение является угловым коэффициентом секущей. Если существует конечная производная, предельная прямая имеет уравнение

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Для рассмотренного движения при $a = 1$ касательная к графику координаты имеет вид $y = x - 1$. Совпадение функции и прямой в точке не означает их совпадения на целом промежутке.

## Что следует из существования производной

Из определения можно записать $f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h)$. Оба слагаемых справа стремятся к нулю, поэтому дифференцируемая функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: график может оставаться непрерывным, но иметь угол.

Для $f(x) = |x - 2|$ при $a = 2$ разностное отношение равно $|h|/h$. Справа оно равно 1, слева $-1$. Следовательно, производной нет, хотя значение функции непрерывно меняется при переходе через 2. Аналогично бесконечный предел разностного отношения не является конечной производной в принятом определении.

## Таблица элементарных производных

В каждой формуле предполагается, что аргумент принадлежит области, где указанная функция дифференцируема. Для произвольного вещественного показателя формула степени без дополнительных оговорок используется при $x > 0$.

$$(C)' = 0, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1),$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

В формулах для арксинуса и арккосинуса требуется $|x| < 1$; для тангенса и котангенса соответствующий знаменатель должен быть ненулевым. Углы измеряются в радианах. Для логарифма модуля справедливо $(\ln|x|)' = 1/x$ при $x \neq 0$.

Например, производную $1/x$ можно получить непосредственно:

$$\frac{1/(x+h) - 1/x}{h} = -\frac{1}{x(x+h)} \longrightarrow -\frac{1}{x^2}.$$

Такой расчёт показывает происхождение формулы и одновременно объясняет исключение точки $x = 0$.

## Правила работы с составными выражениями

Если $u$ и $v$ дифференцируемы, то

$$(au + bv)' = au' + bv', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Правило произведения следует из добавления и вычитания $u(x+h)v(x)$ в приращении произведения. После деления на $h$ возникают два разностных отношения; непрерывность $u$ и $v$ позволяет перейти к пределу. Поэтому производная произведения не равна произведению производных.

### Разбор B. Произведение и частное

Для $y = (x+1)e^{-2x}$ учитываем изменение обоих множителей:

$$y' = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} = -(2x+1)e^{-2x}.$$

Если $z = (x^2-1)/(x^2+1)$, то

$$z' = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Знаменатель положителен при всех вещественных $x$, поэтому знак производной здесь определяется знаком $x$.

## Цепное правило и чувствительность

Для композиции $y = F(g(x))$ внешняя функция меняется через промежуточную переменную. Это даёт **цепное правило**

$$y' = F'(g(x))g'(x).$$

При нескольких уровнях вложенности правило применяется последовательно, начиная с внешнего уровня. Внутренняя функция при этом остаётся аргументом внешней производной.

### Разбор C. Три уровня вложенности

$$(\sqrt{1+3x^2})' = \frac{3x}{\sqrt{1+3x^2}},$$
$$(\ln(2+\cos x))' = \frac{-\sin x}{2+\cos x},$$
$$([\sin(1+x^2)]^3)' = 6x\sin^2(1+x^2)\cos(1+x^2).$$

В последнем выражении последовательно дифференцируются куб, синус и квадрат аргумента. Если пропустить любой из этих переходов, результат потеряет соответствующий множитель.

Для простой координатной модели $y = L\sin\theta$ производная по углу равна $L\cos\theta$. При $L = 2$ и $\theta = \pi/3$ она равна 1: малое изменение угла на $\Delta\theta$ радиан вызывает изменение координаты примерно на $\Delta\theta$ единиц длины. Это локальное приближение, точность которого уменьшается при больших изменениях угла.

## Задания для самостоятельного разбора

1. По определению найдите производную $f(x) = 2x^2 - x$ в точке $x = 3$.
2. Запишите касательную к $y = \ln x$ при $x = 2$ и укажите её область применения как приближения.
3. Найдите производную $(2x - 1)\cos(3x)$ двумя последовательными применениями правил.
4. Исследуйте существование производной $|3x + 1|$ в точке $-1/3$.
5. Для $y = \sqrt{4 + \sin^2 x}$ выделите все уровни композиции и вычислите производную.