ЛЕКЦИЯ 11

Дифференцирование сложных зависимостей

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Неявная, параметрическая и степенная записи требуют разных приёмов дифференцирования. Высшие производные и дифференциал уточняют изменение, а правило Лопиталя помогает исследовать некоторые неопределённости.

Цели обучения

- Дифференцировать логарифмическую, неявную и параметрическую записи.
- Находить высшие производные и линейное приближение.
- Проверять предпосылки правила Лопиталя.

Когда функция задана неявно

Не каждую зависимость удобно разрешать относительно y. Координаты могут быть связаны уравнением, а движение — задано через параметр времени. Дифференцирование в таких случаях начинается с выяснения, какая величина является независимой и какие выражения зависят от неё.

Если $F(x, y(x)) = 0$, при дифференцировании каждого вхождения y необходимо учитывать множитель y'. В точке, где соответствующие частные производные непрерывны и $F_y \neq 0$, локально существует дифференцируемая функция $y(x)$ и

$$F_x + F_y y' = 0, \qquad y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Частная производная здесь означает производную по одной переменной при фиксированной другой. На практике равенство часто дифференцируют непосредственно, не вводя специальных обозначений.

Разбор A. Касательная к эллипсу

Из $x^2 + 4y^2 = 20$ следует $2x + 8yy' = 0$, поэтому $y' = -x/(4y)$ при $y \neq 0$. Точка $(2, 2)$ принадлежит эллипсу; наклон касательной равен $-1/4$. Уравнение прямой:

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 2), \qquad x + 4y = 10.$$

В точках с $y = 0$ деление недопустимо. Там нельзя подставлять нуль в полученную дробь и объявлять конечную производную; геометрию касательной рассматривают отдельно, например выразив x через y.

Логарифмирование перед дифференцированием

Для положительной функции y равенство $(\ln y)' = y'/y$ превращает произведение в сумму, а переменную степень — в произведение. После вычисления необходимо умножить результат на саму функцию y.

Разбор B. Переменные основание и показатель

Пусть $y = (1 + x)^{\sin x}$, где $x > -1$. Тогда

$$\ln y = \sin x \ln(1 + x), \qquad y' = (1 + x)^{\sin x} \left(\cos x \ln(1 + x) + \frac{\sin x}{1 + x} \right).$$

Обычная формула степени с постоянным показателем здесь неприменима: изменяется и основание, и показатель. Условие положительности основания обеспечивает вещественное определение степени через экспоненту и логарифм.

Для $z = (x + 2)^2/[\sqrt{x}(x^2 + 1)]$ при $x > 0$ получаем

$$\frac{z'}{z} = \frac{2}{x + 2} - \frac{1}{2x} - \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Такой ответ удобно оставить в виде произведения z на найденную сумму. Приведение к общей дроби не обязательно, если задача не требует дальнейшего исследования знака.

Производные параметрической кривой

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $x'(t) \neq 0$, параметр можно локально исключить. Цепное правило даёт

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{x'}\right)}{x'(t)}.$$

Во второй формуле производную отношения берут по t, а затем ещё раз делят на $x'(t)$. Отношение $y''(t)/x''(t)$ в общем случае не является второй производной по x.

Разбор C. Эллиптическая траектория

Пусть $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 < t < \pi$. Поскольку $x' = -2\sin t \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\cot t, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4\sin^3 t}.$$

В точке $t = \pi/2$ касательная горизонтальна, а вторая производная равна $-1/4$. Это согласуется с формой верхней половины эллипса: вблизи вершины график расположен ниже своей горизонтальной касательной.

Высшие производные и дифференциал

Повторное дифференцирование определяет f'', f''' и $f^{(n)}$. Для координаты движения первая производная задаёт скорость, вторая — ускорение. Порядок производной всегда относится к выбранной независимой переменной.

$$(e^{-2t})^{(n)} = (-2)^n e^{-2t}, \qquad (x\cos 2x)'' = -4\sin 2x - 4x\cos 2x.$$

Во втором примере на первом шаге получается $\cos 2x - 2x\sin 2x$. Повторное применение правила произведения объясняет появление двух одинаковых слагаемых с синусом.

Линейная часть приращения

При $dx = \Delta x$ дифференциал равен $dy = f'(x)dx$, тогда как точное приращение равно $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Их связывает формула

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \qquad f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Дифференциал обычно не равен точному приращению; он выделяет его главную линейную часть.

Для $f(x) = \sqrt[3]{x}$ около $x = 8$ имеем $f(8) = 2$, $f'(8) = 1/12$. Поэтому $\sqrt[3]{8{,}12} \approx 2 + 0{,}12/12 = 2{,}01$. Малость приращения аргумента объясняет полезность приближения, но сама по себе не задаёт строгой оценки ошибки. Для оценки можно дополнительно ограничить вторую производную на рассматриваемом промежутке.

Правило Лопиталя: условия раньше вычислений

Для отношения с неопределённостью $0/0$ или ∞/∞ предел иногда можно найти по отношению производных. Достаточный вариант правила требует дифференцируемости числителя и знаменателя в проколотой односторонней окрестности, ненулевой производной знаменателя и существования предела отношения производных, конечного или бесконечного. Тогда

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило применяют отдельно с нужной стороны; для двустороннего предела результаты должны совпасть. Оно не утверждает равенства самих дробей. Производные числителя и знаменателя берут отдельно, а не по правилу производной частного.

Разбор D. Два последовательных применения

При $x \to 0$ числитель $\ln(1+x) - x$ и знаменатель x^2 стремятся к нулю. После первого применения форма остаётся $0/0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x) - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/(1+x)^2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Окрестность выбирают внутри $x > -1$. Здесь условия выполняются с обеих сторон нуля.

При $x \to +\infty$ отношение $\ln x/\sqrt{x}$ имеет форму ∞/∞ и предел равен пределу $2/\sqrt{x}$, то есть нулю. Для произведения $x^2 \ln x$ при $x \to 0+$ сначала записывают $\ln x/(1/x^2)$; после дифференцирования получается $-x^2/2 \to 0$. Без преобразования произведение не соответствует форме правила.

Задания для самостоятельного разбора

1. Найдите y' из $x^2 + xy + y^2 = 7$ и вычислите её в точке $(1, 2)$.
2. Логарифмическим дифференцированием найдите производную $(2+x)^{\cos x}$.
3. Для $x = t^3$, $y = t^2$, $t > 0$ вычислите первую и вторую производные по x.
4. Приближённо вычислите $\sqrt{25{,}2}$ с помощью дифференциала.
5. Найдите предел $(e^{2x} - 1 - 2x)/x^2$ при $x \to 0$, проверяя неопределённость на каждом шаге.