ЛЕКЦИЯ 12

Как восстановить форму графика по производным

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Область определения, пределы и знаки производных задают проверяемую схему исследования функции. График строится по установленным свойствам, а не только по нескольким вычисленным точкам.

Цели обучения

- Находить промежутки монотонности и экстремумы.
- Исследовать знак второй производной и точки перегиба.
- Определять асимптоты и строить согласованный эскиз графика.

График как результат исследования

Несколько вычисленных точек не определяют форму графика между ними. Функция может иметь дополнительный экстремум, разрыв или быстро уходить в бесконечность. Надёжный эскиз опирается на область определения, пределы и знаки производных. Каждый из этих инструментов отвечает на свой вопрос: где существует функция, куда направляются её ветви и как они изгибаются.

Удобен следующий порядок работы: определить допустимые аргументы; проверить симметрию и найти пересечения с осями; исследовать пределы у границ области; найти промежутки возрастания и убывания; установить экстремумы и перегибы; согласовать все сведения на одном рисунке. Отдельные шаги могут оказаться простыми, но пропуск области определения способен сделать неверным всё дальнейшее исследование.

Монотонность и локальные экстремумы

Если $f'(x) > 0$ на интервале, функция строго возрастает на нём; если $f'(x) < 0$, строго убывает. Обоснование даёт теорема Лагранжа: для любых $a < b$ внутри интервала существует $c \in (a, b)$, для которого $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Поэтому знак производной определяет знак приращения.

Локальный максимум в точке a означает, что в некоторой окрестности $f(x) \le f(a)$. Для локального минимума неравенство меняется на противоположное. Экстремум сравнивает близкие значения; наибольшее или наименьшее значение на всей области требует отдельной проверки.

Если во внутренней точке экстремума существует производная, то она равна нулю. Это необходимое условие Ферма, но не достаточное: у x^3 производная обращается в нуль при $x = 0$, однако функция продолжает возрастать. Кроме стационарных точек $f' = 0$, проверяют точки области определения, в которых производная не существует, например вершину графика $|x|$.

Признак по смене знака

Пусть функция непрерывна в рассматриваемой точке. Если производная меняет знак с плюса на минус, возникает локальный максимум; с минуса на плюс — локальный минимум. Если знак по обе стороны сохраняется, экстремума нет. Этот признак применяется при указанных знаках производной в достаточно малых соседних интервалах.

Разбор A. Полное исследование полинома

Рассмотрим $f(x) = x(x-3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$. Область определения — вся прямая. Нули: 0 и 3; второй нуль двукратный. Функция отрицательна при $x < 0$, положительна при $x > 0$, кроме точки 3, где равна нулю. Она не является ни чётной, ни нечётной. Старший член даёт пределы $-\infty$ слева и $+\infty$ справа.

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3), \qquad f''(x) = 6x - 12.$$

Знаки первой производной и характер изменения удобно собрать в таблицу:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

Таким образом, $(1, 4)$ — точка локального максимума, а $(3, 0)$ — точка локального минимума. Никакого наибольшего или наименьшего значения на всей числовой прямой нет из-за неограниченности обеих ветвей.

Вторая производная и изгиб графика

Знак f'' описывает изменение наклона касательной. При $f'' > 0$ наклон возрастает, а график лежит выше касательных на соответствующем интервале; эту форму называют выпуклостью вниз. При $f'' < 0$ наклон убывает, график лежит ниже касательных — выпуклость вверх. Геометрическое описание устраняет возможную неоднозначность терминологии.

Точка перегиба — точка непрерывного графика, при переходе через которую меняется характер выпуклости. Равенство $f''(a) = 0$ выделяет кандидата, но не гарантирует перегиб: у x^4 вторая производная $12x^2$ не меняет знак. Перегиб возможен и там, где вторая производная не существует, поэтому ограничиваться решением одного уравнения нельзя.

У нашего полинома $f'' < 0$ при $x < 2$ и $f'' > 0$ при $x > 2$. Точка $(2, 2)$ является перегибом. При этом $f'(2) = -3$: перегиб не обязан иметь горизонтальную касательную. Его касательная $y = 2-3(x-2) = 8-3x$ пересекает график в точке смены выпуклости.

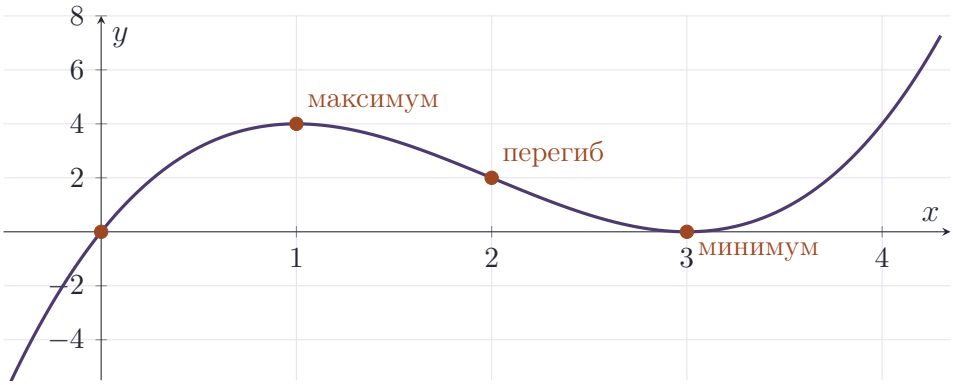


Рисунок согласуется с вычислениями: в точке 3 график касается оси, но не меняет знак. Перегиб расположен между двумя стационарными точками. Дополнительные числовые точки могут уточнить рисунок, но не заменяют исследование знаков.

Асимптоты и границы области определения

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой, если хотя бы один односторонний предел при $x \to a$ бесконечен. Для наклонной асимптоты $y = kx + b$ требуется $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Если соответствующие конечные пределы существуют, коэффициенты находятся по формулам

$$k = \lim \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim(f(x) - kx).$$

При $k = 0$ асимптота горизонтальна. Оба направления бесконечности проверяют отдельно. Разрыв сам по себе ещё не означает вертикальную асимптоту: при устранимом разрыве предел конечен.

Разбор B. Две ветви рациональной функции

Пусть

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1}, \qquad x \neq 1.$$

При приближении к 1 слева последняя дробь стремится к $-\infty$, справа — к $+\infty$. Поэтому $x = 1$ является вертикальной асимптотой. На обеих бесконечностях дробь стремится к нулю, значит $y = x+1$ — наклонная асимптота. Левая ветвь лежит ниже этой прямой, правая — выше.

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}, \qquad g''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Производная положительна при $x < 1-\sqrt{2}$ и $x > 1+\sqrt{2}$, отрицательна на $(1-\sqrt{2}, 1)$ и $(1, 1+\sqrt{2})$. Получаем локальный максимум со значением $2-2\sqrt{2}$ и локальный минимум со значением $2 + 2\sqrt{2}$ соответственно. Разрыв разделяет два промежутка убывания: объединять их в один интервал нельзя.

Вторая производная отрицательна слева от 1 и положительна справа, но точки перегиба при $x = 1$ нет: эта точка не принадлежит графику. Числитель $x^2 + 1$ никогда не равен нулю, поэтому пересечений с осью абсцисс нет; пересечение с осью ординат — $(0, -1)$.

Наибольшее значение на отрезке

Непрерывная функция на замкнутом ограниченном отрезке достигает наибольшего и наименьшего значений. Для их нахождения сравнивают значения в концах отрезка и во всех внутренних критических точках. Один только локальный максимум может не дать глобального ответа.

Для $f(x) = x(x - 3)^2$ на $[0, 5]$ сравниваем $f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(3) = 0$, $f(5) = 20$. Наибольшее значение 20 достигается в правом конце, наименьшее 0 — в двух точках, 0 и 3. Этот пример показывает, почему концы отрезка обязательно входят в список кандидатов.

Задания для самостоятельного разбора

1. Исследуйте монотонность и экстремумы $x^3 - 12x$; найдите точку перегиба.
2. Объясните, почему нуль второй производной у x^6 не даёт перегиба.
3. Найдите асимптоты $(x^2 + 4)/(x + 2)$ и положение ветвей относительно наклонной прямой.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения $x^3 - 3x$ на $[-2, 3]$.
5. Составьте схему исследования $x + 1/x$ и объясните, почему в точке 0 нет перегиба.