ЛЕКЦИЯ 13

Восстановление функции по заданной скорости

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Первообразная восстанавливает величину по её производной с точностью до постоянной. Табличные формулы и предварительное упрощение позволяют решать основные обратные задачи.

Цели обучения

- Различать одну первообразную и всё семейство.
- Использовать линейность и таблицу интегралов.
- Учитывать область определения и начальное условие.

Обратная задача для производной

Производная сообщает скорость изменения величины, но не её исходный уровень. Если известна скорость перемещения по координате, восстановление координаты требует ещё одного значения в выбранный момент. Эта простая ситуация объясняет и смысл первообразной, и появление произвольной постоянной.

Первообразная и неопределённый интеграл

Функция F называется первообразной для f на интервале I, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Совокупность всех первообразных записывают как

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Здесь f — подынтегральная функция, x — переменная интегрирования, C — произвольная постоянная. Интеграл без границ обозначает семейство функций.

Если F и G — две первообразные на одном интервале, то $(F - G)' = 0$. По теореме Лагранжа разность постоянна: для любых двух точек её приращение равно нулю. Поэтому добавление одной постоянной описывает все решения, а не только несколько возможных примеров.

Разбор A. Координата по известной скорости

Пусть $v(t) = 6t^2 - 4t + 3$. Интегрируя каждое слагаемое, получаем

$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 3t + C.$$

Из начального положения $s(0) = 2$ следует $C = 2$. Проверка состоит из двух независимых действий: производная найденной функции равна заданной скорости, а значение при $t = 0$ равно 2. Если начальное положение не дано, выбор $C = 0$ был бы произвольным ограничением ответа.

Таблица, полученная обратным чтением производных

Каждую формулу можно проверить дифференцированием правой части. Ниже $a > 0$, а в показательной формуле дополнительно $a \neq 1$:

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0),$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Для произвольной вещественной степени стандартно рассматривают $x > 0$; в отдельных целочисленных или рациональных случаях область может быть шире. Тригонометрические формулы действуют на интервалах без нулей знаменателя. Последняя формула записана для $|x| < 1$.

Особое положение степени -1 существенно: подстановка $\alpha = -1$ в первую строку приводит к делению на нуль. Для $1/x$ нужна отдельная логарифмическая формула. Модуль обеспечивает корректный ответ как на положительной, так и на отрицательной полуоси.

Линейность и предварительное упрощение

Производная линейна, поэтому первообразную суммы можно получить сложением первообразных. Постоянный числовой множитель выносится за знак интеграла. При оформлении семейства достаточно одной общей произвольной постоянной в конце:

$$\int \bigl(af(x) + bg(x)\bigr)\,dx = aF(x) + bG(x) + C, \qquad F' = f, \quad G' = g.$$

Это свойство не переносится на произведение: интеграл произведения обычно не равен произведению интегралов. Аналогично нельзя отдельно интегрировать числитель и знаменатель дроби, а затем делить результаты.

Разбор B. Сумма разных табличных типов

$$\int \left(5x^4 + \frac{2}{x} - 3\sin x\right) dx = x^5 + 2\ln|x| + 3\cos x + C.$$

Область исключает нуль. Знак перед косинусом положителен, поскольку его производная отрицательна. Проверка знака особенно полезна при интегрировании тригонометрических выражений.

Разбор C. Деление каждого слагаемого на знаменатель

Для $x \neq 0$ преобразуем дробь до применения таблицы:

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2}\, dx = \int \left(x - \frac{2}{x} + x^{-2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$$

Производная последнего слагаемого равна $1/x^2$, поэтому минус в первообразной необходим. Упрощение исходной функции часто позволяет избежать более сложного метода.

Как учитывать масштаб аргумента

Если $F' = f$ и $k \neq 0$, то цепное правило даёт $(F(kx+b))' = kf(kx+b)$. Следовательно,

$$\int f(kx+b)\, dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C.$$

Множитель $1/k$ компенсирует внутреннюю производную. Он появляется не из внешнего вида выражения, а из обязательной проверки обратным дифференцированием.

Разбор D. Линейный аргумент

$$\int (3x-2)^4\, dx = \frac{(3x-2)^5}{15} + C, \qquad \int \sin(4x+1)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(4x+1) + C.$$

В первом ответе знаменатель $15 = 5 \cdot 3$ учитывает увеличение степени и внутреннюю производную. Во втором знак связан с производной косинуса, а коэффициент — со скоростью изменения аргумента.

Ещё два полезных масштабированных варианта при $a > 0$:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Во второй формуле $|x| < a$. Для $a = 3$ первая даёт $\int dx/(9 + x^2) = \frac{1}{3}\arctan(x/3) + C$. Для $a = 2$ вторая даёт $\int dx/\sqrt{4 - x^2} = \arcsin(x/2) + C$. Внешние коэффициенты различаются, хотя обе формулы содержат отношение x/a; это легко проверить производной.

Область определения и постоянные

Рассмотрим $\int dx/(x-2) = \ln|x-2| + C$. На каждом из интервалов $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$ все первообразные отличаются одной постоянной. Но если описывать функцию сразу на объединении этих интервалов, постоянные слева и справа могут быть независимыми: через разрыв их ничто не связывает.

Начальное условие в точке $x = 3$ определяет постоянную на правом интервале, но не задаёт её на левом. Поэтому фраза «первообразные отличаются на постоянную» должна относиться к одному интервалу. Это уточнение важно и для функций с несколькими запрещёнными точками.

Проверка результата как часть решения

После интегрирования полезно выполнить три проверки. Во-первых, продифференцировать ответ и упростить его до исходной функции. Во-вторых, сопоставить области определения: логарифмы и корни могут потребовать дополнительных ограничений. В-третьих, проверить заданное начальное значение, если оно имеется. Совпадение в одной числовой точке не заменяет тождества производных на интервале.

Например, выражение $(3x - 2)^5/5$ внешне похоже на ответ в разборе D, но его производная равна $3(3x - 2)^4$. Такая ошибка немедленно обнаруживается проверкой и исправляется делением на 3.

Задания для самостоятельного разбора

1. Найдите все первообразные $4x^3 - 2x + 5$ и выберите ту, которая обращается в нуль при $x = 1$.
2. Вычислите $\int (x^2 + 3x - 2)/x \, dx$, предварительно разделив слагаемые.
3. Найдите $\int \cos(5x - 2) \, dx$ и проверьте внутренний коэффициент.
4. Вычислите $\int dx/(16 + x^2)$ и укажите область определения ответа.
5. Объясните, почему условие $F(1) = 0$ для $F' = 1/x$ не определяет значения F при $x < 0$.