ЛЕКЦИЯ 14

Преобразование интеграла: подстановка и выбор множителей

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Удачное преобразование делает интеграл узнаваемым. Подстановка использует внутреннюю зависимость, а метод по частям переносит дифференцирование на более простой множитель.

Цели обучения

- Полностью переходить к новой переменной.
- Выбирать множители в формуле по частям.
- Сочетать методы и проверять найденную первообразную.

Выбор метода начинается со структуры

Перед вычислением интеграла полезно выяснить, что именно делает выражение сложным. Если внутри функции находится выражение, производная которого присутствует рядом, естественна подстановка. Если произведение содержит множитель, упрощающийся при дифференцировании, может помочь интегрирование по частям. Предварительное раскрытие скобок, деление многочленов или тригонометрическое тождество иногда сразу сводит задачу к таблице.

Эти приёмы выводятся из правил дифференцирования. Поэтому найденная первообразная обязательно проверяется производной: внешне правдоподобный ответ может отличаться знаком, коэффициентом или потерянным слагаемым.

Подстановка как обратное цепное правило

Если $F'(u) = f(u)$ и $u = g(x)$, то производная $F(g(x))$ равна $f(g(x))g'(x)$. Отсюда

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Запись $du = g'(x)dx$ позволяет кратко выполнить переход. После замены весь интеграл должен быть выражен через новую переменную; оставшиеся одновременно x

и u обычно показывают, что преобразование не завершено. В конце неопределённого интегрирования возвращаются к исходной переменной.

Разбор A. Корень и его внутренняя производная

В интеграле $\int x\sqrt{4+x^2}\,dx$ выбираем $u = 4 + x^2$, $du = 2x\,dx$. Тогда

$$\int x\sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(4+x^2)^{3/2} + C.$$

Производная ответа равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(4+x^2)^{1/2}\cdot 2x$, то есть исходной функции. Равенство первообразных проверяется при всех x, хотя замена $u = 4 + x^2$ не является взаимно однозначной на всей прямой: здесь непосредственно используется цепное правило, а не глобальное обращение функции.

Разбор B. Логарифм в роли переменной

При $x > 0$ положим $u = \ln x$, $du = dx/x$. Получаем

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int u^2\,du = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

Знаменатель x не мешает замене, а обеспечивает нужный дифференциал. Если бы вместо dx/x стояло dx, эта подстановка сама по себе не дала бы столь простого степенного интеграла.

Разбор C. Когда нужно преобразовать оставшийся множитель

Для $\int x^3/(1+x^2)\,dx$ выбираем $u = 1 + x^2$. Тогда $x\,dx = du/2$, а оставшееся $x^2 = u - 1$. Следовательно,

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}\,du = \frac{1}{2}\bigl(1 + x^2 - \ln(1+x^2)\bigr) + C.$$

Постоянную $1/2$ можно включить в C, получив эквивалентный ответ $x^2/2 - \ln(1+x^2)/2 + C$. Логарифм не требует модуля, поскольку $1 + x^2 > 0$.

Интегрирование по частям

Из формулы $d(uv) = u\,dv + v\,du$ после интегрирования следует

Перенос дифференцирования

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Выбор u должен по возможности упростить его производную; выбор dv должен позволять найти v. Метод полезен, когда новый интеграл проще исходного или связан с ним удобным линейным соотношением.

При выборе первообразной v достаточно взять одну удобную, без отдельной постоянной. Произвольную постоянную добавляют к окончательному результату. Для логарифма и обратных тригонометрических функций часто удобно взять их за u; для произведения многочлена с экспонентой — дифференцировать многочлен.

Разбор D. Линейный множитель и синус

Пусть $u = x$, $dv = \sin 3x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = -\cos 3x/3$, поэтому

$$\int x\sin 3x\,dx = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{\sin 3x}{9} + C.$$

Второе слагаемое компенсирует часть производной первого. Если его забыть, при проверке останется лишний косинус.

Разбор E. Один множитель скрыт

Интеграл $\int \arctan x\,dx$ можно рассматривать как произведение $\arctan x \cdot 1$. Выбираем $u = \arctan x$, $dv = dx$:

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Последний шаг использует подстановку $1+x^2$. Таким образом, два метода естественно соединяются в одном решении.

Повторение метода и возвращение исходного интеграла

Для $\int x^2 e^{-x}\,dx$ дифференцирование многочлена понижает степень. Два применения формулы дают

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx,$$

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C,$$

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -(x^2+2x+2)e^{-x} + C.$$

Каждое повторение должно продвигать решение к более простому интегралу. Если выбор множителей повышает степень многочлена, стоит пересмотреть его.

Иногда после двух шагов возвращается исходный интеграл. Это не тупик: полученное равенство можно решить алгебраически. Для $I = \int e^{2x}\sin x\,dx$ и $J = \int e^{2x}\cos x\,dx$ выбираем экспоненту в качестве dv. С точностью до добавляемых постоянных имеем

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}J, \qquad J = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}I.$$

Подстановка второго равенства в первое даёт $\frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x$. Поэтому

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + C.$$

Постоянная в окончательном ответе учитывает выбор представителей первообразных в промежуточных равенствах.

Сочетание двух методов

В интеграле $\int x \arctan(x^2)\,dx$ сначала положим $u = x^2$. Тогда $x\,dx = du/2$. Остаётся половина интеграла от $\arctan u$, уже вычисленного по частям. Возвращаясь к x, получаем

$$\int x \arctan(x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C.$$

При проверке производные дополнительных дробных слагаемых взаимно сокращаются, оставляя $x\arctan(x^2)$. Порядок методов здесь выбран по структуре: сначала убираем вложенный квадрат, затем интегрируем обратную тригонометрическую функцию по частям.

Полезно записывать причину выбора подстановки или множителей одной фразой. Это делает решение воспроизводимым: становится понятно, какой признак в исходном выражении подсказал следующий шаг. Само название метода без преобразований не объясняет вычисление.

Задания для самостоятельного разбора

1. Вычислите $\int x/\sqrt{1+2x^2}\,dx$ и проверьте коэффициент.
2. Найдите $\int e^x/(3+e^x)\,dx$, полностью переходя к новой переменной.
3. Вычислите $\int x\cos 2x\,dx$ по частям.
4. Дважды примените метод по частям к $\int x^2 \sin x\,dx$.
5. Найдите $\int x\ln(1+x^2)\,dx$, сочетая подстановку и интегрирование по частям.