ЛЕКЦИЯ 15

Накопленный результат: интеграл на отрезке

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Определённый интеграл собирает малые вклады в итоговое число. Формула Ньютона–Лейбница и преобразования с учётом границ связывают этот смысл с вычислением.

Цели обучения

- Определять интеграл и использовать его свойства.
- Вычислять его через первообразную, подстановку и метод по частям.
- Различать знаковый итог, площадь и пройденный путь.

От отдельных вкладов к общему результату

При неравномерном движении произведение одной скорости на всё время обычно не даёт точного перемещения. Можно разбить время на короткие промежутки, умножить значение скорости внутри каждого промежутка на его длину и сложить вклады. Определённый интеграл возникает как предел таких сумм при измельчении разбиения.

Пусть $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой. Если при $\max_i \Delta x_i \to 0$ она стремится к одному конечному пределу независимо от выбора точек и разбиений, этот предел обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$. Любая непрерывная функция на $[a, b]$ интегрируема в этом смысле. Определённый интеграл является числом, а переменную под его знаком можно переименовать.

Разбор A. Предел сумм для линейной скорости

Для $f(t) = t$ на $[0, 2]$ возьмём n равных частей и правые концы $t_i = 2i/n$. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n}\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = 2 + \frac{2}{n} \longrightarrow 2.$$

Следовательно, $\int_0^2 t\,dt = 2$. Существование интеграла обеспечивается непрерывностью; вычисление одной последовательности сумм находит его значение. В общем случае одна удачная последовательность сумм сама по себе ещё не доказывает интегрируемость.

Свойства, которые помогают до вычислений

Для интегрируемых функций справедливы линейность и аддитивность по промежутку:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx,$$
$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx \quad (a \le c \le b).$$

По соглашению $\int_a^a f\,dx = 0$ и $\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx$. Обращение порядка границ меняет знак результата, а не саму подынтегральную функцию.

При $a < b$ из $f \ge 0$ следует неотрицательность интеграла. Если $f \le g$, то интеграл f не превосходит интеграла g. В частности, из $m \le f(x) \le M$ получаем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a), \qquad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Эти оценки позволяют заметить невозможный ответ. Например, если $1 \le f \le 3$ на отрезке длины 2, результат должен лежать между 2 и 6. Отрицательное число противоречило бы условиям задачи ещё до проверки вычислений.

Формула Ньютона–Лейбница

Для непрерывной f функция накопления $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет производную $G'(x) = f(x)$. Действительно, отношение приращения G к приращению аргумента является средним значением f на коротком промежутке и по непрерывности стремится к $f(x)$.

Любая другая первообразная F отличается от G постоянной. Сравнивая значения на концах, получаем

Вычисление через первообразную

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b, \qquad F' = f.$$

Постоянная интегрирования сокращается при вычитании. В ответе на определённый интеграл произвольную постоянную не добавляют.

Например,

$$\int_{-1}^{2} (3x^2 + 2)\,dx = (x^3 + 2x)\Big|_{-1}^{2} = 12 - (-3) = 15.$$

Скобки вокруг значения на нижнем пределе обязательны при устном или письменном счёте: вычитается всё значение первообразной, включая его знак.

Подстановка вместе с изменением границ

Если $u = g(x)$, то при переходе к u меняются и дифференциал, и границы. Для непрерывной f и непрерывно дифференцируемой g, значения которой остаются в области непрерывности f,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Эта формула следует из цепного правила и Ньютона–Лейбница. Обратная замена через $x = \varphi(u)$ также допустима при выполнении соответствующих условий; главное — не смешивать старые границы с новой переменной.

Разбор B. Рациональное выражение

В интеграле $\int_0^2 t/(1+t^2)\,dt$ берём $u = 1 + t^2$, $du = 2t\,dt$. При $t = 0$ получаем $u = 1$, при $t = 2$ — $u = 5$:

$$\int_0^2 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln 5.$$

Здесь возвращаться к t уже не нужно: преобразованные границы позволяют закончить вычисление в переменной u.

Разбор C. Тригонометрическая подстановка

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 + \sin x}\,dx = \int_2^3 \frac{du}{u} = \ln\frac{3}{2}, \qquad u = 2 + \sin x.$$

На рассматриваемом отрезке знаменатель положителен. Пределы 2 и 3 получены подстановкой исходных концов в новую переменную, а не переносом старых чисел под новый интеграл.

Интегрирование по частям на отрезке

Для непрерывно дифференцируемых u, v формула принимает вид

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Граничное произведение вычисляется в обоих концах. Эта часть представляет вклад, который нельзя потерять при переносе дифференцирования на другой множитель.

Разбор D. Затухающая скорость изменения

Берём $u = t$, $dv = e^{-t}dt$, откуда $v = -e^{-t}$. Тогда

$$\int_0^2 te^{-t}\,dt = -te^{-t}\Big|_0^2 + \int_0^2 e^{-t}\,dt$$
$$= -2e^{-2} + 1 - e^{-2} = 1 - 3e^{-2}.$$

Ответ положителен, что согласуется с неотрицательностью подынтегральной функции. Другая задача с $u = \arctan x$, $dv = dx$ даёт

$$\int_0^1 \arctan x\,dx = x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Оставшийся интеграл вычисляется подстановкой. Так методы для неопределённых интегралов переносятся на отрезок с обязательным учётом границ.

Перемещение, путь и среднее значение

Определённый интеграл учитывает знак функции. Для координатной скорости $v(t) = 2t - 2$ на $[0, 3]$ перемещение равно

$$\Delta s = \int_0^3 (2t - 2)\,dt = 3.$$

Но до момента $t = 1$ движение направлено в сторону убывания координаты. Поэтому путь вычисляется через модуль скорости:

$$L = \int_0^1 (2 - 2t)\,dt + \int_1^3 (2t - 2)\,dt = 1 + 4 = 5.$$

По той же причине геометрическая площадь между графиком и осью равна интегралу модуля; положительные и отрицательные части обычного интеграла взаимно компенсируются.

Среднее значение функции на отрезке ненулевой длины определяется формулой

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Для непрерывной функции оно равно некоторому значению $f(c)$ на отрезке. В примере средняя координатная скорость равна $3/3 = 1$, а средняя путевая скорость — $5/3$. Выбор интегрируемой величины зависит от смысла вопроса.

Если внутри отрезка функция неограниченна, обычную формулу нельзя применять механически через точку разрыва. Например, выражение $1/x^2$ на $[-1, 1]$ не задаёт обычного интеграла Римана. Такая задача требует отдельного определения несобственного интеграла; формальная подстановка в $-1/x$ через нуль дала бы неверный отрицательный результат.

Площадь между двумя зависимостями

Если на отрезке $f(x) \geq g(x)$, то площадь между графиками равна $\int_a^b (f-g)\,dx$. Верхняя граница определяет положительную высоту вертикальной полоски, нижняя из неё вычитается. При смене порядка графиков отрезок разбивают по точкам пересечения.

Разбор E. Сравнение линейного и квадратичного роста

Графики $y = 2x$ и $y = x^2$ пересекаются при $x = 0$ и $x = 2$. Между этими точками $2x - x^2 = x(2-x) \geq 0$, поэтому

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left(x^2 - x^3/3\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Положительный результат согласуется с геометрическим смыслом. Если поменять функции местами, получится отрицательный интеграл, но не отрицательная площадь. При решении сначала устанавливают границы фигуры и порядок графиков, затем выбирают вычислительный метод.

В задачах накопления полезна также проверка единиц: интегрирование скорости по времени даёт длину, а интегрирование высоты по горизонтальной координате — площадь. Среднее значение после деления на длину промежутка имеет те же единицы, что и исходная функция. Эта проверка помогает обнаружить ошибочный множитель даже при формально верных преобразованиях.

Задания для самостоятельного разбора

1. По формуле Ньютона–Лейбница вычислите $\int_0^2 (4x^3 - x)\,dx$.
2. Используя подстановку, найдите $\int_0^1 x/\sqrt{4+x^2}\,dx$.
3. По частям вычислите $\int_1^2 x \ln x\,dx$.
4. Для $v(t) = 3 - t$ на $[0, 5]$ отдельно найдите перемещение, путь и среднюю путевую скорость.
5. Без вычисления первообразной оцените $\int_0^1 dx/(2+x^2)$ снизу и сверху.