ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 15

# Интегрирование по частям в определённом интеграле

**Преподаватель: Бауыржан Дербісалы**

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

**Тип лекции:** теоретическая лекция с разбором примеров.

**Основная идея:** Формула интегрирования по частям преобразует интеграл произведения и создаёт граничный член. Его нужно вычислять на обоих концах отрезка, сохраняя пределы в оставшемся интеграле.

## 1. Цели обучения

- Применять формулу интегрирования по частям с граничным членом;
- Выбирать множители и выполнять повторное интегрирование по частям;
- Проверять числовой результат по знаку и через первообразную.

## 2. Зачем нужен метод интегрирования по частям

Формула Ньютона–Лейбница сводит вычисление определённого интеграла к нахождению первообразной. Однако произведение двух простых функций не обязательно имеет очевидную первообразную. Для выражений $xe^x$, $x\cos x$, $\ln x$ полезно перераспределить дифференцирование между множителями.

В неопределённом интеграле метод по частям даёт семейство первообразных. В определённом интеграле он сразу связывает два числа и отдельный вклад на концах отрезка. Поэтому здесь особенно важно аккуратно вычислять граничное выражение и сохранять пределы во всех промежуточных интегралах.

## 3. Вывод формулы и условия применения

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Из правила производной произведения

$$(uv)' = u'v + uv'$$

после интегрирования и применения формулы Ньютона–Лейбница получаем

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx}.$$

В сокращённых обозначениях $du = u'(x)\,dx$, $dv = v'(x)\,dx$ формула имеет вид

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du}.$$

Обозначение $[uv]_a^b$ означает $u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Это число, а не произведение двух отдельных приращений. В частности, $[uv]_a^b$ в общем случае не равно $[u]_a^b[v]_a^b$.

Условие непрерывной дифференцируемости является удобным достаточным условием. Если один из множителей имеет особенность на отрезке, сначала требуется исследовать существование интеграла; формальное применение формулы через особую точку не обосновано.

## 4. Выбор множителей и порядок действий

Подынтегральное выражение записывают как $u\,dv$. Выбор полезен, если производная $u$ проще самой функции, а первообразная $v$ для $dv$ находится без труда. Обычно многочлен выгодно дифференцировать, а экспоненту или синус и косинус — интегрировать. Для логарифма часто используют представление $\ln x = \ln x \cdot 1$.

Последовательность вычисления такова:

1. Указать $u$ и $dv$, затем отдельно найти $du$ и $v$.
2. Подставить их в формулу, сохранив исходные пределы.
3. Вычислить произведение $uv$ на обоих концах отрезка.
4. Найти оставшийся интеграл и выполнить вычитание.
5. Проверить знак и, когда возможно, оценить величину результата.

Если новый интеграл сложнее исходного, следует пересмотреть выбор. Само наличие произведения ещё не означает, что метод по частям будет лучшим; иногда замена переменной существенно короче.

При нахождении $v$ достаточно выбрать одну первообразную без постоянной. Действительно, замена $v$ на $v + K$ добавила бы к правой части

$$K[u]_a^b - K\int_a^b u'(x)\,dx = K(u(b) - u(a)) - K(u(b) - u(a)) = 0.$$

Таким образом, результат не зависит от этого выбора, и произвольная постоянная в определённом интеграле не появляется.

### Пример 1. Произведение линейной функции и экспоненты

Вычислим

$$I = \int_0^1 xe^x\,dx.$$

Полагаем $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = e^x$, поэтому

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

На $[0, 1]$ выполняется $x \le xe^x \le ex$. Интегрирование этих неравенств даёт

$$\frac{1}{2} \le I \le \frac{e}{2},$$

и найденное число 1 удовлетворяет оценке. Такая проверка не заменяет вычисления, но позволяет обнаружить грубую ошибку со знаком или потерянным граничным слагаемым.

### Пример 2. Логарифм и степенной множитель

Найдём $\int_1^e x\ln x\,dx$. Выбираем

$$u = \ln x, \qquad dv = x\,dx, \qquad du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \frac{x^2}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \boxed{\frac{e^2 + 1}{4}}.\end{aligned}$$

В граничном произведении нижний вклад равен нулю из-за $\ln 1 = 0$, но нижний вклад во втором интеграле не исчезает. Нельзя переносить обнуление одного выражения на все остальные части вычисления.

Для интеграла без множителя $x$ выбор $u = \ln x$, $dv = dx$ даёт

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx = e - (e - 1) = 1.$$

Логарифм здесь упрощается при дифференцировании, а множитель $v = x$ сокращает знаменатель в $du = dx/x$.

### Пример 3. Тригонометрическая функция

Рассмотрим

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx.$$

При $u = x$, $dv = \cos x \, dx$ имеем $du = dx$, $v = \sin x$. Следовательно,

$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Подынтегральная функция неотрицательна и положительна во внутренних точках отрезка, поэтому результат должен быть положительным. Число $\pi/2 - 1$ действительно положительно. Если в формуле заменить минус перед интегралом на плюс, получится другое число, хотя граничное выражение останется верным.

## 5. Повторное применение формулы

Если один множитель является многочленом степени $n$, последовательное дифференцирование понижает его степень. После конечного числа шагов остаётся табличный интеграл. Границы при каждом шаге сохраняются, а все граничные слагаемые складываются с соответствующими знаками.

### Пример 4. Квадратичный множитель

Пусть

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^x \, dx.$$

Выбираем $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$. Тогда

$$I_2 = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x \, dx.$$

Последний интеграл уже найден в примере 1 и равен 1. Поэтому

$$\boxed{I_2 = e - 2}.$$

Можно также сначала найти первообразную повторным интегрированием по частям:

$$F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Тогда $F(1) - F(0) = e - 2$. Оба пути дают один результат; непосредственная работа с определёнными интегралами удобна, когда вспомогательный интеграл уже известен.

Более общая связь для $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$, $n \geq 1$, имеет вид

$$I_n = e - n I_{n-1}, \qquad I_0 = e - 1.$$

Она получается тем же выбором $u = x^n$, $dv = e^x \, dx$. Нижний граничный вклад равен нулю именно при $n \geq 1$; для $I_0$ его нужно учитывать отдельно.

## 6. Циклическое возвращение к исходному интегралу

Иногда два применения метода возвращают исходный интеграл. Это не означает, что вычисление зашло в тупик: полученное равенство можно решить как алгебраическое уравнение. В определённом интеграле все граничные выражения уже являются числами, поэтому неопределённых постоянных нет.

**Пример 5. Экспонента и косинус**

Обозначим

$$I = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx, \qquad J = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx.$$

В первом интеграле берём $u = \cos x$, $dv = e^x \, dx$. Поскольку $du = -\sin x \, dx$, получаем

$$I = [e^x \cos x]_0^{\pi/2} + J = -1 + J.$$

Во втором интеграле при $u = \sin x$, $dv = e^x \, dx$

$$J = [e^x \sin x]_0^{\pi/2} - I = e^{\pi/2} - I.$$

Подставляя второе равенство в первое, находим

$$I = -1 + e^{\pi/2} - I, \qquad \boxed{I = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}}.$$

Важно перенести второй экземпляр $I$ в левую часть. Остановка на равенстве, которое всё ещё содержит исходный интеграл справа, не завершает вычисление.

## 7. Рекуррентная формула для степеней синуса

Рассмотрим семейство интегралов

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Начальные значения легко вычисляются:

$$J_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad J_1 = 1.$$

При целом $n \geq 2$ представим $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$ и положим

$$u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x \, dx, \quad du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \, dx, \quad v = -\cos x.$$

Граничное выражение $[-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2}$ равно нулю: в верхнем пределе обнуляется косинус, в нижнем — положительная степень синуса. Поэтому

$$\begin{aligned} J_n &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1)(J_{n-2} - J_n). \end{aligned}$$

Переносим последнее слагаемое влево:

$$\boxed{J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}, \qquad n \geq 2}.$$

Чётные степени последовательно сводятся к $J_0$, нечётные — к $J_1$. Например,

$$J_2 = \frac{1}{2}J_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad J_4 = \frac{3}{4}J_2 = \frac{3\pi}{16}, \qquad J_3 = \frac{2}{3}J_1 = \frac{2}{3}.$$

Рекуррентная формула позволяет избежать длинного раскрытия тригонометрических тождеств. При этом начальные значения и диапазон $n \geq 2$ являются необходимой частью результата.

## 8. Проверка вычисления и типичные ошибки

Главные источники ошибок — неверный знак перед новым интегралом, пропущенное значение при нижнем пределе и несогласованный выбор $v$ и $dv$. Проверка $v' = dv/dx$ сразу выявляет ошибку в первообразной; например, первообразная $\sin x$ равна $-\cos x$, а не $\cos x$.

Граничное выражение полезно всегда раскрывать как разность двух полных произведений. Если используется найденная первообразная $F$, её производная должна совпадать с подынтегральной функцией на всём отрезке. После подстановки пределов следует отдельно проверить знак: интеграл положительной функции при $a < b$ не может быть отрицательным.

Методы подстановки и интегрирования по частям могут дополнять друг друга. Например, наличие $2x$ рядом с $e^{x^2}$ подсказывает замену $t = x^2$, тогда как множитель $x$ рядом с $e^x$ естественно дифференцировать по частям. Правильный выбор определяется структурой выражения, а не его внешней длиной.

## 9. Вопросы для самопроверки

1. Выведите формулу по частям из производной произведения и поясните смысл $[uv]_a^b$.
2. Почему постоянная, добавленная к $v$, не меняет результат?
3. Вычислите $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$, отдельно проверив множитель в $v$.
4. Найдите $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ и проверьте знак ответа.
5. Используя рекуррентную формулу, вычислите $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$.
6. Объясните, почему формула для $I_n$ требует отдельного начального значения $I_0$.