ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 2

Матрицы. Обратная матрица и ранг

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Операции над матрицами требуют согласования размеров. Обратимость квадратной матрицы определяется её определителем, а ранг характеризует число линейно независимых строк или столбцов.

1. Цели обучения

- Выполнять сложение, умножение и транспонирование матриц;
- Проверять существование обратной матрицы и находить её;
- Определять ранг по минорам и ступенчатой форме.

2. Размер, элементы и основные виды матриц

Матрицей размера $m \times n$ называют прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Первый индекс элемента показывает строку, второй — столбец. Матрицы равны тогда и только тогда, когда совпадают их размеры и все соответствующие элементы. Матрица-строка имеет размер $1 \times n$, матрица-столбец — $m \times 1$. Эти объекты различаются, даже если содержат одинаковые числа.

Квадратная матрица имеет одинаковое число строк и столбцов. У диагональной матрицы все элементы вне главной диагонали равны нулю. Единичная матрица E_n имеет единицы на главной диагонали и нули на остальных местах. Нулевая матрица обозначается O; её размер должен быть понятен из записи. Верхняя треугольная матрица содержит нули ниже главной диагонали.

Матрицы позволяют компактно записывать данные и преобразования. Например, таблица затрат двух видов сырья на три вида продукции имеет размер 2×3: строки отвечают сырью, столбцы — продукции. Порядок строк и столбцов задаёт смысл каждого числа, поэтому его нельзя менять без объяснения.

3. Линейные операции

Сложение определено только для матриц одинакового размера:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Разность $A - B$ означает $A + (-1)B$. Для сложения действуют привычные свойства: $A+B = B+A$, $(A+B)+C = A+(B+C)$, $A+O = A$. Умножение на число распределяется по сумме и может выполняться последовательно: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Пример 1. Линейная комбинация матриц

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти $2A - B$. Сначала умножаем каждый элемент A на 2, затем вычитаем соответствующие элементы B:

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

В правом нижнем углу получается $6 - (-2) = 8$. Знаки относятся к элементам, а не к строкам целиком.

4. Умножение матриц

Произведение AB существует, если число столбцов A равно числу строк B. При размерах $A : m \times n$ и $B : n \times p$ результат имеет размер $m \times p$. Его элемент получают умножением строки первой матрицы на столбец второй:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}.$$

Внутренний размер n определяет число слагаемых, а внешние размеры m, p — размер результата. Это правило полезно проверять до вычислений.

Пример 2. Произведение прямоугольных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы имеют размеры 2×3 и 3×2, поэтому AB будет квадратной порядка два. Например,

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1, \qquad c_{21} = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 2.$$

Вычислив остальные элементы, получаем

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обратное произведение BA тоже существует, но имеет размер 3×3. Поэтому уже по размерам видно, что равенство $AB = BA$ здесь невозможно.

4.1. Свойства и ограничения

При согласованных размерах

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Умножение на единичную матрицу сохраняет исходную матрицу: $E_m A = A E_n = A$. Однако в общем случае $AB \neq BA$, даже если обе матрицы квадратные одного порядка.

Кроме того, из $AB = O$ не следует $A = O$ или $B = O$. Например,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O, \qquad N^2 = O.$$

Поэтому нельзя автоматически переносить на матрицы все правила действий с числами. Сокращение матричного множителя допустимо, если известна его обратимость.

4.2. Транспонирование

При транспонировании строки становятся столбцами: $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. Если A имеет размер $m \times n$, то A^T имеет размер $n \times m$. Выполняются равенства

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \qquad (AB)^T = B^T A^T, \qquad (A^T)^T = A.$$

Во втором равенстве порядок множителей меняется. Это согласуется и с размерами матриц, и с правилом вычисления каждого элемента произведения.

5. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Она существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Такая матрица называется невырожденной. **Обратная матрица** единственна: если B и C обе обратны к A, то

$$B = B(AC) = (BA)C = C.$$

Через алгебраические дополнения обратная матрица выражается формулой

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}}, \qquad \operatorname{adj} A = (A_{ji}).$$

Сначала находят таблицу алгебраических дополнений, затем транспонируют её. Именно этот последний шаг часто пропускают. Формула основана на тождестве $A \operatorname{adj} A = (\det A)E$: диагональные элементы произведения дают разложения определителя, а внедиагональные — определители с повторяющимися строками.

Пример 3. Полное нахождение обратной матрицы

Пусть $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Сначала проверяем существование:

$$\det C = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0.$$

Алгебраические дополнения образуют таблицу $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. После транспонирования получаем

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим результат:

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица не получается заменой каждого элемента на обратное число. Например, нулевые элементы допустимы и у невырожденной матрицы, тогда как выражение $1/0$ не определено.

Если обе квадратные матрицы обратимы, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Порядок снова меняется: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = E$. Матричное уравнение $AX = B$ решают умножением слева на A^{-1}: $X = A^{-1}B$. Умножение справа обычно не приводит к нужному сокращению.

6. Ранг: число независимых строк и столбцов

Минор порядка k получается выбором любых k строк и k столбцов. **Рангом** называют наибольший порядок ненулевого минора. Для нулевой матрицы ранг равен нулю. Всегда

$$0 \leq \operatorname{rank} A \leq \min(m, n).$$

Эквивалентно, ранг равен максимальному числу линейно независимых строк; он также равен максимальному числу независимых столбцов. Строки независимы, если их линейная комбинация может быть нулевой только при нулевых коэффициентах.

Элементарные преобразования строк сохраняют ранг. После приведения к ступенчатому виду ранг равен количеству ненулевых строк. До такого приведения просто считать ненулевые строки нельзя: среди них могут быть пропорциональные или выражающиеся через другие.

Пример 4. Определение ранга двумя способами

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая строка вдвое больше первой, поэтому ранг не превосходит 2. Минор из строк $1, 3$ и столбцов $1, 2$ равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $\operatorname{rank} D = 2$. Тот же вывод даёт замена $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ и перенос нулевой строки вниз: остаются две независимые ненулевые строки.

Пример 5. Ранг матрицы с параметром

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \end{pmatrix}.$$

После вычитания удвоенной первой строки из второй получаем $(0, 0, t-6)$. Если $t \neq 6$, имеются две независимые строки и ранг равен 2. Если $t = 6$, вторая строка исчезает и ранг равен 1. Это также видно по минору из первого и третьего столбцов, равному $t - 6$. Ранг не может быть нулём, поскольку элемент $f_{11} = 1$.

7. Связь понятий и самопроверка

Для квадратной матрицы порядка n условия $\det A \neq 0$, существование A^{-1} и равенство $\operatorname{rank} A = n$ эквивалентны. Для прямоугольной матрицы ранг определён, а определитель всей матрицы и обычная двусторонняя обратная матрица не определяются.

1. При каких размерах определены одновременно AB и BA? Совпадут ли их размеры?
2. Почему из $AB = AC$ нельзя всегда заключить $B = C$?
3. Найдите обратную к $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицу и проверьте умножением.
4. Объясните, почему транспонирование не меняет ранг.
5. Найдите ранг $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.