ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

# Лекция 5

# Векторы и их произведения

**Преподаватель: Бауыржан Дербісалы**

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

**Тип лекции:** теоретическая лекция с разбором примеров.

**Основная идея:** Скалярное, векторное и смешанное произведения связывают координатные вычисления с геометрией: углами, площадями и объёмами.

## 1. Цели обучения

- Выполнять действия над векторами в координатах;
- Вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения;
- Находить углы, площади и объёмы и проверять геометрический смысл ответа.

## 2. Вектор и его координаты

**Вектор** характеризуется длиной и направлением. Свободные векторы можно переносить параллельно самим себе: их положение в пространстве несущественно. Равные векторы имеют одинаковые длины и направления. Нулевой вектор имеет длину ноль; направление и угол с ним не определяются.

В прямоугольной декартовой системе координат

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3), \qquad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Коэффициенты $a_i$ — координаты вектора, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы осей. На плоскости третья координата отсутствует. Для точек $A$ и

$B$ имеем $\overrightarrow{AB} = B - A$: из координат конца вычитают координаты начала. При смене направления $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, но длина остаётся прежней.

**Пример 1. Вектор между двумя точками**

Пусть $A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 2, 1)$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} = (3-1,\ 2-(-1),\ 1-2) = (2, 3, -1), \qquad |AB| = \sqrt{14}.$$

Единичный вектор того же направления равен $(2, 3, -1)/\sqrt{14}$. Делить на длину можно только для ненулевого вектора.

## 3. Линейные операции и геометрический смысл

Сложение и умножение на число выполняют покоординатно:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \qquad \lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Геометрически сумма строится по правилу треугольника или параллелограмма. При $\lambda > 0$ направление сохраняется, при $\lambda < 0$ меняется на противоположное, длина умножается на $|\lambda|$. Вычитание $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ означает прибавление противоположного вектора.

Ненулевые векторы коллинеарны, если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ для некоторого числа $\lambda$. Проверка пропорциональности через отношения координат требует осторожности при нулевых координатах. Надёжнее сравнить сами равенства $a_i = \lambda b_i$.

Точка на прямой через $A$ и $B$ имеет радиус-вектор $M = A + t(B - A)$. При $0 \le t \le 1$ точка лежит на отрезке. Если $AM : MB = 2 : 1$, то $t = 2/3$. Для точек из примера 1 получаем $M = (7/3, 1, 4/3)$. Таким образом, линейные операции описывают не только перемещения, но и деление отрезка в заданном отношении.

## 4. Скалярное произведение

Для ненулевых векторов **скалярное произведение** определяется равенством

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi.$$

Результат является числом. В ортонормированных координатах

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}.$$

Координатная формула следует из разложения по $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: произведения разных базисных векторов равны нулю, а каждого базисного вектора на себя — единице.

**Скалярное произведение** симметрично, линейно по каждому аргументу и удовлетворяет $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$. Для ненулевых векторов

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}, \qquad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Положительное произведение соответствует острому углу, отрицательное — тупому. Неравенство $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ позволяет проверить, что вычисленный косинус лежит между $-1$ и $1$.

### Пример 2. Угол и ортогональная проекция

Пусть $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$. Тогда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2, \qquad |\mathbf{a}| = \sqrt{5}, \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{2}, \qquad \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Скалярная проекция $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{b}$ равна $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})/|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$. Векторная проекция отличается от скалярной:

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = (0, 1, 1).$$

Проверим геометрический смысл. Разность $\mathbf{a} - \operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (1, 1, -1)$ перпендикулярна $\mathbf{b}$, поскольку её скалярное произведение с $\mathbf{b}$ равно $1 - 1 = 0$.

В механике работа постоянной силы выражается скалярным произведением силы и перемещения: $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$. Например, для $\mathbf{F} = (3, -1, 2)$ и $\mathbf{s} = (2, 1, 0)$ работа равна $6 - 1 = 5$ в согласованных единицах. Перпендикулярная перемещению составляющая силы работы не совершает.

## 5. Векторное произведение

В ориентированном трёхмерном пространстве **векторное произведение** $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярно обоим векторам. Его направление задаётся правилом правой руки, а длина равна

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi.$$

Это площадь параллелограмма, построенного на двух векторах. Координатная формула:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\; a_3b_1 - a_1b_3,\; a_1b_2 - a_2b_1).$$

Её удобно запоминать с помощью символической записи

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

При разложении по первой строке перед слагаемым с $\mathbf{j}$ стоит минус. В отличие от скалярного произведения, перестановка множителей меняет знак: $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Для ненулевых векторов нулевое векторное произведение равносильно коллинеарности.

### Пример 3. Площадь и нормаль

Для векторов из примера 2 получаем $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (2, -1, 1)$. Проверим перпендикулярность: $(2,-1,1)\cdot(1,2,0) = 2 - 2 = 0$ и $(2,-1,1)\cdot(0,1,1) = -1 + 1 = 0$. Длина произведения равна $\sqrt{6}$, поэтому площадь параллелограмма равна $\sqrt{6}$, а площадь треугольника — $\sqrt{6}/2$.

В задачах о трёх точках сначала строят два вектора с общим началом, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а затем находят их векторное произведение. Координаты точек нельзя подставлять вместо векторов сторон без предварительного вычитания.

## 6. Смешанное произведение и объём

**Смешанным произведением** трёх векторов называют число

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Его модуль равен объёму параллелепипеда. Это следует из формулы «площадь основания умножить на высоту»: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ направлен по нормали к основанию, а скалярное произведение выделяет соответствующую компоненту $\mathbf{c}$.

$$V_{\text{пар}} = |[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]|, \qquad V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}|[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]|.$$

Перестановка двух векторов меняет знак смешанного произведения. Циклическая перестановка знак сохраняет. Три вектора компланарны, то есть лежат в одной плоскости после переноса к общему началу, тогда и только тогда, когда смешанное произведение равно нулю.

### Пример 4. Объём и независимость

Добавим к векторам $\mathbf{a}=(1,2,0)$, $\mathbf{b}=(0,1,1)$ вектор $\mathbf{c}=(1,0,1)$. Уже найдено $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(2,-1,1)$, поэтому

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1 = 3.$$

Векторы некомпланарны. Объём параллелепипеда равен 3, объём тетраэдра с тремя указанными рёбрами из одной вершины равен $1/2$. Если поменять $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ местами, смешанное произведение станет $-3$, но геометрический объём не изменится.

## 7. Выбор произведения и самопроверка

Скалярное произведение используют для углов, проекций и перпендикулярности. Векторное — для нормали, площадей и коллинеарности. Смешанное — для объёмов и компланарности. До вычислений полезно определить, какого типа должен быть ответ: число или вектор.

1. Почему угол с нулевым вектором не определяется?
2. Чем отличаются скалярная и векторная проекции?
3. Какие произведения меняют знак при перестановке множителей?
4. Найдите площадь треугольника с вершинами $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,2)$.
5. Проверьте компланарность векторов $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,2)$.
6. Почему при вычислении площади и объёма необходим модуль?