ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 3

Системы линейных уравнений. Правило Крамера

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Сравнение рангов основной и расширенной матриц устанавливает совместность системы. Правило Крамера даёт единственное решение квадратной системы при ненулевом определителе.

1. Цели обучения

- Записывать систему в матричной форме и составлять расширенную матрицу;
- Определять совместность и число решений по теореме Кронекера–Капелли;
- Применять правило Крамера и проверять найденное решение.

2. Линейная система и её матричная запись

Линейное уравнение с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ имеет вид $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$. Коэффициенты и свободный член считаются заданными. Неизвестные входят только в первой степени: выражения x_1x_2, x_1^2, $\sin x_1$ делают уравнение нелинейным.

Система из m линейных уравнений записывается как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad AX = b.$$

Здесь A — матрица коэффициентов размера $m \times n$, X — столбец неизвестных, b — столбец свободных членов. Решением является набор значений *всех* неизвестных, одновременно удовлетворяющий каждому уравнению. Решение только одного уравнения ещё не решает систему.

Совместная система имеет хотя бы одно решение, несовместная не имеет решений. Совместная система называется определённой, если решение единственно, и неопределённой, если решений бесконечно много. Над действительными числами линейная система не может иметь ровно два или три различных решения: из двух решений получаются все их аффинные комбинации.

Действительно, если $AX_1 = b$ и $AX_2 = b$, то для любого $t \in \mathbb{R}$

$$A\big((1-t)X_1 + tX_2\big) = (1-t)b + tb = b.$$

При $X_1 \neq X_2$ это даёт бесконечно много различных решений.

3. Основная и расширенная матрицы

Основная матрица содержит только коэффициенты при неизвестных. Расширенная матрица получается добавлением справа столбца свободных членов:

$$\widetilde{A} = (A \mid b).$$

Порядок неизвестных должен быть одинаковым во всех строках. Если какое-либо неизвестное отсутствует, на его месте ставят нулевой коэффициент.

Пример 1. Правильная запись матриц

Для системы

$$\begin{cases} 2x - z = 4, \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

при порядке неизвестных x, y, z имеем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Пропуск нуля во второй позиции первой строки изменил бы смысл таблицы. По расширенной матрице всегда должно быть возможно однозначно восстановить исходную систему.

4. Исследование совместности по рангам

Теорема Кронекера–Капелли. Система $AX = b$ совместна тогда и только тогда, когда

$$\boxed{\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}}.$$

Смысл критерия можно понять через столбцы. Равенство $AX = b$ означает, что b является линейной комбинацией столбцов A с коэффициентами $x_1, \dots, x_n$. Добавление столбца b не увеличивает ранг именно тогда, когда такая комбинация существует.

Если общий ранг равен r, возможны два случая:

- $r = n$: все неизвестные определяются однозначно;
- $r < n$: можно выбрать $n - r$ свободных неизвестных, остальные выражаются через них.

Число уравнений само по себе не определяет число решений. Дополнительное уравнение может повторять уже имеющееся условие, а может ему противоречить. Поэтому важна независимость условий, которую и измеряет ранг.

Пример 2. Одни коэффициенты, разные свободные члены

Рассмотрим семейство систем

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = c. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения удвоенное первое. Получится $0 = c - 4$. При $c = 4$ второе уравнение не даёт нового ограничения: оба ранга равны 1, а решения имеют вид $x = 2 - t,\ y = t$. При $c \neq 4$ возникает противоречие. Тогда $\operatorname{rank} A = 1$, $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 2$, и решений нет.

Геометрически каждое уравнение с двумя неизвестными задаёт прямую, если хотя бы один коэффициент ненулевой. Две прямые могут пересекаться в одной точке, совпадать или быть различными параллельными прямыми. Эти случаи соответствуют единственному решению, бесконечному множеству решений и несовместности.

5. Правило Крамера и его обоснование

Пусть система квадратная: число уравнений и неизвестных равно n. Обозначим $\Delta = \det A$. Если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Через Δ_j обозначим определитель матрицы, у которой j-й столбец заменён столбцом b. Тогда

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Заменяется именно столбец коэффициентов при искомом неизвестном. Остальные столбцы сохраняют исходный порядок.

Обоснуем формулу через линейность определителя. Обозначим столбцы A через $a_1, \ldots, a_n$. Для решения системы

$$b = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n.$$

Подставим эту сумму в j-й столбец определителя Δ_j. При раскрытии по линейности все слагаемые с a_k, $k \neq j$, содержат два одинаковых столбца и равны нулю. Остаётся $\Delta_j = x_j \Delta$. Деление допустимо именно при $\Delta \neq 0$.

Пример 3. Система второго порядка

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Вычисляем три определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, получаем $x = (-6)/(-3) = 2$, $y = (-3)/(-3) = 1$. Проверка: $2 \cdot 2 + 1 = 5$ и $2 - 1 = 1$. Подстановка проверяет не только вычисленные числа, но и правильность первоначальной записи системы.

Пример 4. Система третьего порядка

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Основной определитель равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) + 3 + 5 = 7.$$

Заменяя последовательно первый, второй и третий столбцы, получаем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21.$$

Например, первый из них по первой строке равен $6(1 - 2) - (-3 - 2) + (6 + 2) = -6 + 5 + 8 = 7$. Таким образом, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Проверяем все уравнения: $1 + 2 + 3 = 6$, $2 - 2 + 3 = 3$, $1 + 4 - 3 = 2$.

6. Что делать при нулевом определителе

При $\Delta = 0$ формулы Крамера применять нельзя. Если хотя бы один $\Delta_j \neq 0$, система несовместна: равенство $\Delta_j = x_j \Delta$ было бы невозможно. Но равенство всех этих определителей нулю для произвольного порядка ещё не гарантирует совместность.

Например, у системы

$$x = 0, \qquad 0 = 1, \qquad 0 = 0$$

с неизвестными x, y, z матрица коэффициентов равна $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$, а $b = (0, 1, 0)^T$. Основной и все три определителя Крамера равны нулю: в каждой матрице остаётся нулевая строка. Тем не менее система явно несовместна. Здесь $\operatorname{rank} A = 1$, а $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 2$. Этот пример показывает, почему в вырожденном случае нужен общий критерий рангов.

Пример 5. Исследование системы с параметром

$$\begin{cases} tx + y = 1, \\ x + ty = 1. \end{cases}$$

Имеем $\Delta = t^2 - 1$, $\Delta_x = t - 1$, $\Delta_y = t - 1$. При $t \neq \pm 1$

$$x = y = \frac{t-1}{t^2-1} = \frac{1}{t+1}.$$

Сокращённая формула сама по себе не описывает случай $t = 1$. Его исследуют в исходной системе: оба уравнения превращаются в $x + y = 1$, поэтому решений бесконечно много. При $t = -1$ получаются $-x + y = 1$ и $x - y = 1$; их сложение даёт $0 = 2$, следовательно, решений нет.

7. Однородная система и общий порядок решения

Система $AX = 0$ называется однородной. Она всегда совместна, поскольку $X = 0$ является решением. Ненулевые решения существуют тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} A < n$. Для квадратной матрицы это эквивалентно $\det A = 0$.

Общий порядок исследования таков: сначала фиксируют порядок неизвестных и составляют матрицы; затем устанавливают совместность и число свободных неизвестных; после этого выбирают метод вычисления. **Правило Крамера** удобно для небольших невырожденных квадратных систем. Для прямоугольных и вырожденных систем универсальнее метод Гаусса.

8. Вопросы для самопроверки

1. Почему совместность не зависит только от числа уравнений?
2. Что означает $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}(A \mid b)$?
3. Объясните формулы Крамера, используя столбцы матрицы.
4. Почему равенство $\Delta = 0$ не означает автоматически бесконечное множество решений?
5. Решите систему $3x + y = 7,\ 2x - y = 3$ и выполните проверку.
6. Исследуйте систему $x + y = 1,\ 2x + 2y = a$ при разных a.