ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 1

Определители второго и третьего порядков

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Определитель — число, связанное с квадратной матрицей. Его свойства позволяют упрощать вычисления, а миноры и алгебраические дополнения — выполнять разложение по строке или столбцу.

1. Цели обучения

- Вычислять определители второго и третьего порядков;
- Находить миноры и алгебраические дополнения;
- Использовать разложение и преобразования строк при вычислении определителя.

2. Что определяет определитель

Матрица $A = (a_{ij})$ представляет собой таблицу чисел. Индекс i указывает строку, а индекс j — столбец. Если число строк равно числу столбцов и равно n, матрицу называют квадратной порядка n. Именно квадратной матрице сопоставляется число $\det A$, называемое **определителем**. Записи $\det A$ и $|A|$ означают одно и то же; вертикальные черты вокруг таблицы в этом случае не обозначают модуль каждого её элемента.

Определитель отвечает на вопрос, независимы ли строки или столбцы квадратной матрицы. Если $\det A \neq 0$, ни одна строка не выражается через остальные. В дальнейшем это условие позволит находить обратную матрицу и единственное решение квадратной

системы линейных уравнений. Равенство $\det A = 0$ указывает на линейную зависимость, но не означает, что все элементы матрицы равны нулю.

3. Определитель второго порядка

Для матрицы из двух строк и двух столбцов определитель задаётся формулой

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \boxed{\det A = ad - bc}.$$

Сначала перемножают элементы главной диагонали, затем вычитают произведение элементов побочной диагонали. Порядок вычитания существенен: замена $ad - bc$ на $bc - ad$ меняет знак ответа. Формула содержит два произведения, а не разность сумм элементов.

Пример 1. Вычисление и проверка знака

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\det A = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5.$$

Поменяем строки местами: $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Непосредственный расчёт даёт $\det B = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -5$. Значение изменило знак, хотя набор чисел остался прежним. Следовательно, при вычислении важны не только элементы, но и их расположение.

Пример 2. Определитель с параметром

Для $C = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$ получаем

$$\det C = t^2 - 4 = (t - 2)(t + 2).$$

Определитель отличен от нуля при $t \neq 2$ и $t \neq -2$. При $t = 2$ вторая строка вдвое больше первой, а при $t = -2$ она равна первой, умноженной на -2. В обоих исключительных случаях строки зависимы. Анализ параметра начинается с разложения определителя на множители, а не с деления на выражение, которое может оказаться нулём.

4. Определитель третьего порядка

Для матрицы порядка три **правило Саррюса** имеет вид

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое содержит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Три произведения берутся со знаком плюс, три — со знаком минус. Практически можно выписать первые два столбца справа от матрицы и проследить диагонали, но это лишь способ запомнить приведённую формулу. На определители четвёртого и более высокого порядка правило Саррюса не переносится.

Пример 3. Вычисление по правилу Саррюса

Рассмотрим

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма произведений с положительными знаками равна

$$1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 1 + 12 = 13.$$

Каждое из трёх произведений с отрицательным знаком содержит нулевой множитель. Поэтому $\det B = 13$. При наличии нулей полезно сначала отметить исчезающие слагаемые: это уменьшает число действий и вероятность ошибки.

5. Миноры и алгебраические дополнения

Минор M_{ij} элемента a_{ij} — определитель матрицы, полученной удалением строки i и столбца j. Сам элемент a_{ij} в этот минор не входит. Для матрицы третьего порядка минор является определителем второго порядка.

Алгебраическое дополнение отличается от минора знаковым множителем:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Знаки образуют шахматный порядок, начинающийся с плюса. Здесь обозначение A_{ij} относится к алгебраическому дополнению, а a_{ij} — к исходному элементу. Эти величины нельзя смешивать.

Определитель можно разложить по любой фиксированной строке или столбцу:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}}, \qquad \boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}}.$$

В первой формуле фиксирован номер строки i, во второй — номер столбца j. Удобнее выбирать строку или столбец с наибольшим числом нулей. Каждый нулевой элемент сразу устраняет соответствующее слагаемое.

Вернёмся к матрице B из примера 3. Для первой строки

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{12} = -M_{12} = 6.$$

Следовательно,

$$\det B = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 0 \cdot A_{13} = 13.$$

Мы получили тот же ответ другим способом. Ошибка в этом примере часто состоит в том, что отрицательный минор M_{12} подставляют вместо положительного дополнения A_{12}.

6. Свойства и их смысл

Для строк справедливы следующие свойства; аналогичные утверждения действуют и для столбцов.

1. Транспонирование не меняет определитель: $\det A^T = \det A$.
2. Перестановка двух строк меняет знак определителя.
3. Общий множитель одной строки можно вынести за знак определителя.
4. Определитель линеен по каждой строке при фиксированных остальных строках.
5. Прибавление к строке другой строки, умноженной на число, не меняет определитель.
6. Если строки линейно зависимы, определитель равен нулю. В частности, это верно при нулевой строке, двух одинаковых или пропорциональных строках.

Объясним связь этих свойств. Если две строки одинаковы, их перестановка не изменяет таблицу, но меняет знак определителя. Поэтому $D = -D$, откуда $D = 0$. Если к строке прибавить кратную другой строки, линейность разбивает результат на исходный определитель и дополнительный определитель с двумя пропорциональными строками. Второе слагаемое равно нулю.

Важно различать умножение одной строки и всей матрицы. Если матрица имеет порядок n, то

$$\det(kA) = k^n \det A.$$

Множитель k выносится последовательно из каждой из n строк. Например, для матрицы из примера 1 умножение только первой строки на 2 даёт определитель 10, а умножение всей матрицы на 2 — определитель 20.

7. Вычисление приведением к треугольному виду

У верхней или нижней треугольной матрицы определитель равен произведению диагональных элементов. Поэтому часто выгодно получить нули под главной диагональю с помощью преобразований строк.

Пример 4. Преобразования, сохраняющие определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Выполним $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ и $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$. Эти действия не меняют определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теперь прибавим к третьей строке удвоенную вторую:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3.$$

Если бы по ходу решения строки менялись местами, потребовалось бы учитывать множитель -1 за каждую перестановку. Если строка делилась на число, значение определителя тоже менялось бы. Надёжный способ записи — рядом с каждым преобразованием отмечать его влияние на определитель.

8. Геометрический смысл и выбор метода

Для двух векторов плоскости $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ площадь построенного на них параллелограмма равна

$$S = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|.$$

Например, для $(2, 1)$ и $(1, 3)$ площадь равна $|6 - 1| = 5$, а площадь соответствующего треугольника — $5/2$. Нулевой определитель означает, что векторы лежат на одной прямой и параллелограмм вырождается. Знак определителя отражает ориентацию, поэтому для площади берётся модуль.

Для порядка два используют явную формулу. Для порядка три выбирают между правилом Саррюса, разложением и преобразованиями. При большем порядке предпочтительны разложение по строке с нулями или приведение к треугольному виду. Перед вычислениями полезно проверить, нет ли пропорциональных строк: иногда ответ 0 виден сразу.

9. Вопросы для самопроверки

1. Почему определитель прямоугольной матрицы не вводится по приведённым формулам?
2. Чем отличаются M_{23} и A_{23}? Каков знак позиции $(2, 3)$?
3. Почему прибавление к строке кратной другой строки сохраняет определитель?
4. Вычислите двумя способами $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.
5. При каких t определитель $\begin{vmatrix} t & 2 \\ 3 & t-1 \end{vmatrix}$ равен нулю?
6. Какие изменения необходимо учитывать при перестановках и делении строк?