ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 7

Плоскость и прямая в пространстве

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Нормаль определяет положение плоскости, а направляющий вектор — положение прямой. Их скалярные и векторные произведения позволяют исследовать пересечения, углы и расстояния.

1. Цели обучения

- Строить уравнения плоскости и прямой по геометрическим данным;
- Находить пересечение прямой с плоскостью и различать возможные случаи;
- Вычислять углы и расстояния, распознавать скрещивающиеся прямые.

2. Плоскость через точку и нормаль

Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — точка плоскости, а $\mathbf{n} = (A, B, C) \neq 0$ — нормальный вектор. Вектор $M - M_0$, соединяющий две точки плоскости, перпендикулярен $\mathbf{n}$. Поэтому

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

После раскрытия скобок получаем **общее уравнение плоскости**:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}, \qquad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Коэффициенты A, B, C задают направление нормали, а D вместе с ними определяет положение плоскости. Умножение всех четырёх коэффициентов на одно ненулевое

число не меняет плоскость. Например, $x+y+z-1=0$ и $2x+2y+2z-2=0$ являются двумя записями одной плоскости.

Если один коэффициент равен нулю, плоскость параллельна соответствующему координатному направлению. Уравнение $z=c$, например, задаёт плоскость, параллельную плоскости Oxy, а $z=0$ — саму плоскость Oxy.

3. Плоскость через три точки

Три точки M_1, M_2, M_3, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Два вектора

$$\mathbf{a} = M_2 - M_1, \qquad \mathbf{b} = M_3 - M_1$$

лежат в ней и неколлинеарны. Поэтому $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$ служит нормалью. Условие принадлежности произвольной точки $M = (x, y, z)$ можно записать через смешанное произведение:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если исходные точки коллинеарны, векторное произведение равно нулю. Тогда через них проходит бесконечно много плоскостей, и единственного уравнения получить нельзя.

Пример 1. Построение плоскости

Возьмём $M_1 = (1,0,0)$, $M_2 = (0,1,0)$, $M_3 = (0,0,1)$. Векторы сторон равны $(-1,1,0)$ и $(-1,0,1)$, их векторное произведение равно $(1,1,1)$. Уравнение через M_1:

$$(x-1) + y + z = 0, \qquad x + y + z = 1.$$

Все три точки удовлетворяют уравнению. Эта проверка полезна, поскольку ошибка знака при вычислении нормали обычно сразу обнаруживается подстановкой.

4. Прямая в пространстве

Прямая через M_0 с ненулевым направляющим вектором $\mathbf{s} = (l, m, n)$ задаётся векторным уравнением

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

или параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + lt, \qquad y = y_0 + mt, \qquad z = z_0 + nt.$$

Если все координаты направления ненулевые, параметр можно исключить:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

При нулевой координате направления соответствующая координата точки постоянна. Например, $\mathbf{s} = (1,0,2)$ даёт $y = y_0$; запись дроби со знаменателем 0 заменяется этим отдельным равенством.

В пространстве одного линейного уравнения недостаточно, чтобы задать прямую: оно задаёт плоскость. Прямую можно представить пересечением двух плоскостей с непараллельными нормалями. Её направление перпендикулярно обеим нормалям и потому пропорционально их векторному произведению.

Пример 2. Переход от пересечения плоскостей к параметру

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x = y$. Полагая $x = y = t$, из первого получаем $z = 1 - 2t$. Следовательно,

$$\mathbf{r} = (0, 0, 1) + t(1, 1, -2).$$

Нормали плоскостей равны $(1, 1, 1)$ и $(1, -1, 0)$; их векторное произведение действительно равно $(1, 1, -2)$.

5. Пересечение прямой и плоскости

Подставим $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s}$ в уравнение плоскости. Получится одно линейное уравнение относительно t:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})t + \big(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + D\big) = 0.$$

Возможны три случая:

- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \neq 0$: существует единственная точка пересечения;
- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + D = 0$: вся прямая лежит в плоскости;
- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 + D \neq 0$: прямая параллельна плоскости и не пересекает её.

Условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 0$ само по себе не различает последние два случая. Нужно проверить хотя бы одну точку прямой.

Пример 3. Нахождение точки пересечения

Пусть $\mathbf{r} = (0, 0, 2) + t(1, 1, -1)$, а плоскость имеет уравнение $x + y + z = 1$. Подстановка даёт $t + t + 2 - t = 1$, откуда $t = -1$. Значит,

$$M = (-1, -1, 3).$$

Проверка плоскости: $-1 - 1 + 3 = 1$. Проверка прямой выполнена самой параметрической подстановкой. Нельзя брать разные значения параметра для разных координат одной точки.

6. Углы в пространстве

Для двух прямых меньший угол между их направлениями находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2|}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|}.$$

Такой угол определён и для скрещивающихся прямых: их направления мысленно переносят к общему началу. Для двух плоскостей используют аналогичную формулу с нормалями:

$$\cos\psi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}.$$

Угол α между прямой и плоскостью дополняет острый угол между направлением прямой и нормалью до $\pi/2$. Поэтому в формуле появляется синус:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}}, \qquad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}.$$

Для прямой и плоскости из примера 3 имеем $\mathbf{n} = (1,1,1)$, $\mathbf{s} = (1,1,-1)$, поэтому $\sin\alpha = 1/3$. Если скалярное произведение равно нулю, угол с плоскостью равен нулю. Если направление прямой параллельно нормали, прямая перпендикулярна плоскости.

7. Расстояния от точки

Расстояние от $P = (x_0, y_0, z_0)$ до плоскости равно модулю проекции на единичную нормаль:

$$\boxed{d(P,\Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

Основание перпендикуляра находится по формуле

$$H = P - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}(A, B, C).$$

Например, для $P = (2,1,1)$ и $x + y + z = 1$ получаем $d = \sqrt{3}$, а $H = (1,0,0)$. Точка H лежит в плоскости, и вектор $P - H = (1,1,1)$ направлен по нормали.

Расстояние от точки P до прямой через M_0 с направлением $\mathbf{s}$ равно

$$d(P,l) = \frac{|(P - M_0) \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

Числитель является площадью параллелограмма, а деление на длину основания даёт высоту. Например, для оси Ox, где $M_0 = 0$, $\mathbf{s} = (1,0,0)$, точка $P = (1,2,3)$ находится на расстоянии $\sqrt{13}$: учитываются только поперечные координаты $2, 3$.

8. Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые

Параллельность направлений означает $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = 0$. Для совпадения дополнительно требуется, чтобы вектор между начальными точками был коллинеарен направлению.

При непараллельных направлениях прямые могут пересекаться или скрещиваться. Условие нахождения в одной плоскости:

$$(M_2 - M_1) \cdot (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) = 0.$$

Если оно выполняется, непараллельные прямые пересекаются; точку находят из равенства их параметрических представлений. Если смешанное произведение ненулевое, общей плоскости нет и прямые скрещиваются.

Например, $l_1 : (x, y, z) = (t, 0, 0)$ и $l_2 : (x, y, z) = (0, 1, s)$ не пересекаются, поскольку их координаты y различаются. Направления $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$ не параллельны. Следовательно, прямые скрещиваются. Их ортогональные направления сами по себе не означают наличие общей точки.

9. Вопросы для самопроверки

1. Почему нормаль плоскости должна быть ненулевой?
2. Когда три точки не определяют единственную плоскость?
3. Как различить прямую в плоскости и прямую, параллельную ей без пересечения?
4. Почему в формуле угла прямой с плоскостью стоит синус?
5. Составьте плоскость через $(1, 2, 3)$ с нормалью $(2, -1, 1)$.
6. Найдите пересечение $x = t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - t$ с $x + y + z = 5$.