ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 8

Предел функции. Теоремы и методы вычисления

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Предел описывает поведение функции вблизи точки, а не обязательно её значение в самой точке. Вычисление предела начинается с проверки области определения и возможности непосредственной подстановки.

1. Цели обучения

- Объяснять определение предела и связь с односторонними пределами;
- Применять теоремы о пределах с учётом их условий;
- Устранять неопределённости с помощью алгебраических преобразований.

2. Смысл предела и точное определение

Предел описывает поведение функции вблизи точки, а не обязательно её значение в самой точке. Пусть функция f определена в точках, сколь угодно близких к a, отличных от a. Число L называется пределом $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad x \in D_f, \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon}.$$

Число ε задаёт требуемую точность значений функции, а δ — достаточную близость аргумента. Сначала выбирается произвольная точность, и только затем подбирается подходящая окрестность. Одно и то же δ должно работать для всех допустимых x из этой окрестности.

Условие $0 < |x - a|$ исключает саму точку a. Функция может быть в ней не определена или иметь значение, не совпадающее с пределом. Поэтому подстановка $x = a$ является удобным методом только при наличии непрерывности.

Пример 1. Проверка определения

Докажем $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. Имеем

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|.$$

Если $|x - 2| < 1$, то $1 < x < 3$, поэтому $|x + 2| < 5$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выбираем

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}.$$

Тогда $0 < |x - 2| < \delta$ влечёт $|x^2 - 4| < 5\delta \le \varepsilon$. Ограничение $\delta \le 1$ нужно, чтобы предварительно контролировать второй множитель. Такая оценка показывает, почему определение требует не только вычисления предполагаемого ответа, но и обоснования близости.

3. Односторонние пределы

Левый предел $\lim_{x\to a-} f(x)$ рассматривает приближение только при $x < a$, правый $\lim_{x\to a+} f(x)$ — только при $x > a$. Если область определения содержит точки с обеих сторон от a, конечный двусторонний предел существует тогда и только тогда, когда существуют и совпадают оба односторонних предела.

Пример 2. Разные значения слева и справа

Пусть $f(x) = |x|/x$, $x \neq 0$. При $x > 0$ функция равна 1, а при $x < 0$ равна -1. Поэтому

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Двустороннего предела нет. Присвоение любого значения $f(0)$ не изменит этого вывода: причина заключается в поведении вблизи нуля.

4. Предел на бесконечности и бесконечный предел

Запись $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ означает, что значения функции становятся сколь угодно близкими к L при всех достаточно больших x:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R: \quad x > R,\ x \in D_f \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Здесь аргумент уходит на бесконечность, а предел L остаётся конечным. Например, $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$.

В записи $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ аргумент приближается к конечной точке, а значения функции превосходят любое заранее заданное число. Символ $+\infty$ не является действительным числом. Для функции $1/(x - 2)$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

При двустороннем приближении единого знака бесконечности нет. Поэтому запись ответа должна учитывать направление приближения.

5. Теоремы о пределах

Если $\lim f(x) = A$ и $\lim g(x) = B$, где A, B конечны, то

$$\lim(f+g) = A + B, \qquad \lim(cf) = cA, \qquad \lim(fg) = AB.$$

Для частного требуется дополнительное условие:

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{A}{B} \qquad \text{при } B \neq 0.$$

Предел единственен. Функция, имеющая конечный предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки. Если $f(x) \le g(x)$ вблизи точки и оба предела конечны, то $A \le B$. Строгое неравенство при переходе к пределу может стать равенством.

Теорема о зажатой функции. Если $u(x) \le f(x) \le v(x)$ и пределы крайних функций равны одному числу L, то предел средней функции тоже равен L.

Пример 3. Ограниченный множитель

Для $x \neq 0$ выполняется

$$-|x| \le x \sin \frac{1}{x} \le |x|.$$

Обе крайние функции стремятся к нулю, поэтому $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$. При этом сама функция $\sin(1/x)$ предела не имеет. Теорему о пределе произведения двух сходящихся функций здесь применять нельзя; нужна оценка произведения бесконечно малого множителя на ограниченный.

Отсутствие предела у $\sin(1/x)$ можно проверить по двум последовательностям аргументов, стремящимся к нулю: при $x_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ значения равны 1, а при $y_n = 1/(3\pi/2 + 2\pi n)$ — -1. Один предел должен был бы совпадать вдоль обеих последовательностей.

6. Непрерывность и непосредственная подстановка

Функция непрерывна в точке a, если определена в этой точке и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Полиномы непрерывны на всей числовой прямой. Рациональная функция непрерывна там, где её знаменатель не равен нулю. Для непрерывных элементарных функций предел можно находить подстановкой при соблюдении области определения.

Например,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2}{x+3} = \frac{3}{4}.$$

Знаменатель в точке равен $4 \neq 0$, поэтому дополнительного преобразования не требуется. Напротив, при получении $0/0$ теорема о частном непосредственно неприменима.

7. Основные способы раскрытия неопределённостей

7.1. Разложение на множители

Пример 4. Сокращение общего множителя

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}.$$

Прямая подстановка приводит к $0/0$. Разлагаем числитель:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3,\qquad x\neq 3.$$

В проколотой окрестности функции совпадают, поэтому предел равен 6. Мы не утверждаем, что исходная дробь определена при $x=3$; для предела достаточно совпадения при близких $x\neq 3$.

7.2. Умножение на сопряжённое выражение

Пример 5. Устранение разности корней

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Для x вблизи нуля корень определён. Умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x}+1$:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Теперь подстановка допустима и даёт $1/2$. Сопряжённое выражение выбирают так, чтобы использовать разность квадратов и получить сокращаемый множитель.

7.3. Выделение старшей степени

Пример 6. Рациональная функция на бесконечности

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-1/x+1/x^2}{2+5/x^2}=\frac{3}{2}.$$

Мы разделили каждое слагаемое числителя и знаменателя на x^2. Для отношения полиномов, если степень числителя меньше степени знаменателя, предел равен нулю; если степени равны, предел равен отношению старших коэффициентов. Если степень числителя больше, необходимо отдельно учитывать знак и направление ухода аргумента. В выражениях с корнями нужно помнить $\sqrt{x^2}=|x|$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1.$$

Замена $|x|$ на x без анализа знака приводит к неверному второму ответу.

8. Устранимый разрыв и порядок рассуждения

Пусть $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ при $x \neq 1$, а $f(1) = a$. Для $x \neq 1$ функция равна $x + 1$, следовательно, её предел в точке 1 равен 2 при любом a. Непрерывной она будет только при $a = 2$. Так устраняется разрыв подходящим определением значения в одной точке.

При вычислении предела сначала проверяют область определения и направление приближения, затем пробуют подстановку. Если возникает неопределённость, выбирают преобразование по структуре выражения. Формы $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 не являются ответами и требуют дополнительного анализа.

9. Вопросы для самопроверки

1. Почему значение функции в точке не определяет её предел?
2. Когда двусторонний предел можно восстановить из односторонних?
3. Чем отличается $x \to \infty$ от $f(x) \to \infty$?
4. Вычислите $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$ с объяснением сокращения.
5. Найдите $\lim_{x \to 0} (\sqrt{4 + x} - 2)/x$.
6. Как доказать $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x) = 0$, не вычисляя предел косинуса?