ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 6

Прямая на плоскости. Угол между прямыми

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Уравнение прямой можно построить по точке и направлению или по точке и нормали. Выбор формы уравнения зависит от исходных геометрических данных.

1. Цели обучения

- Составлять общее и параметрическое уравнения прямой;
- Определять взаимное положение и угол между прямыми;
- Вычислять расстояние от точки до прямой.

2. Прямая как геометрическое условие

Уравнение линии связывает координаты её точек. Для прямой удобно использовать два вида исходных данных: точку и направление либо точку и перпендикулярный прямой вектор. Эти способы описывают одну геометрическую фигуру и позволяют выбирать наиболее короткий путь решения.

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ лежит на прямой, а $\mathbf{n} = (A, B) \neq (0, 0)$ — её **нормальный вектор**. Вектор $M - M_0 = (x - x_0, y - y_0)$ соединяет две точки прямой и потому перпендикулярен $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \cdot (M - M_0) = 0.$$

Отсюда получаем уравнение через точку и нормаль

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

После раскрытия скобок оно принимает общий вид

$$\boxed{Ax + By + C = 0}, \qquad A^2 + B^2 > 0.$$

Умножение всех коэффициентов на одно ненулевое число не меняет прямую. Условие $A^2 + B^2 > 0$ исключает запись, которая вообще не задаёт прямую: при $A = B = 0$ остаётся либо тождество, либо противоречие.

3. Направляющий вектор и разные формы уравнения

Вектор $\mathbf{s} = (m, n) \neq (0, 0)$, параллельный прямой, называется направляющим. Все точки прямой представляются как

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(m, n), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Это **параметрическая форма**:

$$x = x_0 + mt, \qquad y = y_0 + nt.$$

При $m \neq 0$ и $n \neq 0$ параметр можно исключить:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Последняя запись называется канонической. Если одна из координат направления равна нулю, дробь с нулевым знаменателем не пишут. Например, при $m = 0$, $n \neq 0$ прямая вертикальна и задаётся равенством $x = x_0$.

Для общего уравнения $Ax + By + C = 0$ можно взять направляющий вектор $(-B, A)$: его скалярное произведение с нормалью (A, B) равно нулю.

3.1. Угловой коэффициент и отрезки на осях

При $B \neq 0$ общее уравнение разрешается относительно y:

$$y = kx + b, \qquad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Число $k = \tan\alpha$ называется угловым коэффициентом; α — угол направления прямой с положительным направлением оси x, рассматриваемый с точностью до π. Вертикальная прямая не представляется в виде $y = kx + b$.

Если прямая пересекает оси в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$, где $a, b \neq 0$, то её уравнение можно записать как $x/a + y/b = 1$. Эта форма удобна для построения по двум пересечениям. Для прямой через начало координат такую запись применять нельзя.

4. Построение уравнения по двум точкам

Через две различные точки $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ проходит единственная прямая. Её направляющий вектор равен

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Условие коллинеарности этого вектора и $M - M_1$ даёт форму, не требующую деления:

$$\boxed{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0}.$$

Она работает и для вертикальных, и для горизонтальных прямых. Если исходные точки совпадают, направление не определяется и одной прямой по таким данным выделить нельзя.

Пример 1. Три записи одной прямой

Пусть $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (3, 6)$. Направление равно $(2, 4)$, его можно сократить до $(1, 2)$. Получаем

$$x = 1 + t, \quad y = 2 + 2t; \qquad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2}; \qquad 2x - y = 0.$$

Все формы задают одну прямую. Подстановка обеих заданных точек в общее уравнение даёт ноль. Если поставить знак плюс перед y, обе проверки не пройдут.

5. Взаимное положение прямых

Пусть

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, прямые пересекаются в единственной точке: координаты точки находятся решением системы двух уравнений.

Если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, нормали пропорциональны и прямые параллельны или совпадают. Для совпадения должны быть пропорциональны все три коэффициента: $(A_2, B_2, C_2) = \lambda(A_1, B_1, C_1)$, $\lambda \neq 0$. Проверять только коэффициенты A, B для вывода о совпадении недостаточно.

Условие перпендикулярности имеет вид

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}.$$

Оно выражает перпендикулярность нормалей, а одновременный поворот обеих нормалей на прямой угол сохраняет угол между направлениями прямых.

Пример 2. Пересечение

Найдём общую точку прямых $2x - y = 0$ и $x + y - 3 = 0$. Из первой $y = 2x$, поэтому $3x = 3$. Получаем $M = (1, 2)$. Подстановка во второе уравнение даёт $1 + 2 - 3 = 0$. Геометрическая задача сведена к линейной системе.

Пример 3. Параллельная и перпендикулярная прямые

Через $P = (1, -1)$ требуется провести прямые, параллельную и перпендикулярную $2x - y = 0$. Для параллельной сохраняем нормаль $(2, -1)$:

$$2(x-1) - (y+1) = 0, \qquad 2x - y - 3 = 0.$$

Для перпендикулярной берём нормаль $(1, 2)$, совпадающую с направлением исходной прямой:

$$(x-1) + 2(y+1) = 0, \qquad x + 2y + 1 = 0.$$

Обе прямые проходят через P. Их нормали $(2, -1)$ и $(1, 2)$ имеют нулевое скалярное произведение.

6. Угол между прямыми

Под углом между неориентированными прямыми обычно понимают меньший угол $\varphi \in [0, \pi/2]$. Через нормали

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}.$$

Модуль устраняет зависимость от выбора знаков нормалей. Для двух невертикальных прямых с угловыми коэффициентами k_1, k_2

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$$

при $1 + k_1k_2 \neq 0$. Если знаменатель равен нулю, прямые перпендикулярны, и пользоваться дробью нельзя.

Для прямых из примера 2 нормали равны $(2, -1)$ и $(1, 1)$, поэтому $\cos\varphi = 1/\sqrt{10}$. Проверка через угловые коэффициенты 2 и -1 даёт $\tan\varphi = 3$, что согласуется с тем же острым углом.

7. Расстояние от точки и основание перпендикуляра

Для точки $P = (x_0, y_0)$ и прямой $Ax + By + C = 0$

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}.$$

Выведем формулу. Возьмём любую точку M прямой. Скалярная проекция $P - M$ на единичную нормаль $\mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ равна

$$\frac{\mathbf{n}\cdot(P - M)}{|\mathbf{n}|} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

поскольку $AM_x + BM_y + C = 0$. Модуль этой проекции и есть расстояние.

Основание перпендикуляра H получается удалением нормальной компоненты:

$$H = P - \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}(A, B).$$

В формуле для точки знаменатель содержит квадрат длины нормали, а в формуле для расстояния — её длину. Эти две формулы нельзя смешивать.

Пример 4. Расстояние и проекция точки

Для $P = (1, 2)$ и $3x + 4y - 10 = 0$ числитель без модуля равен 1, длина нормали равна 5. Поэтому $d = 1/5$, а

$$H = (1, 2) - \frac{1}{25}(3, 4) = \left(\frac{22}{25}, \frac{46}{25}\right).$$

Проверяем принадлежность: $3 \cdot 22/25 + 4 \cdot 46/25 - 10 = 0$. Вектор $P - H = (3, 4)/25$ параллелен нормали, значит, отрезок действительно перпендикулярен прямой.

Расстояние между параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$ равно $|C_2 - C_1|/\sqrt{A^2 + B^2}$. Перед применением формулы коэффициенты при x, y нужно привести к одинаковому виду.

8. Вопросы для самопроверки

1. Как получить направляющий вектор по общему уравнению?
2. Почему форма через определитель удобнее дробной записи при вертикальной прямой?
3. Чем проверка совпадения отличается от проверки параллельности?
4. Найдите прямую через $(2, 1)$ и $(-1, 4)$.
5. Найдите расстояние от начала координат до $3x - 4y + 10 = 0$.
6. Почему расстояние не меняется при умножении уравнения прямой на ненулевое число?