ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 9

Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Замечательные пределы и эквивалентные бесконечно малые позволяют выделять главный член выражения. Замена эквивалентными безопасна для множителей, но требует особой осторожности в разностях.

1. Цели обучения

- Применять первый и второй замечательные пределы;
- Использовать таблицу эквивалентных бесконечно малых;
- Распознавать случаи, когда замена в разности теряет главный член.

2. Почему нужны замечательные пределы

Алгебраические преобразования не всегда устраняют неопределённость. В выражениях с тригонометрическими, показательными и логарифмическими функциями нужны базовые предельные соотношения. Они позволяют сравнивать малые величины и находить главный вклад в выражение.

Во всех тригонометрических формулах этой лекции аргумент измеряется в радианах. Это существенное условие: числовое значение предела зависит от единицы измерения угла.

3. Первый замечательный предел

Первый замечательный предел имеет вид

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}.$$

Для $0<x<\pi/2$ сравнение площадей вписанного треугольника, сектора единичного круга и описанного треугольника даёт

$$\sin x<x<\tan x.$$

После деления получаем $\cos x<\sin x/x<1$. При $x\to 0+$ крайние выражения стремятся к единице, поэтому по теореме о зажатой функции среднее имеет тот же предел. Функция $\sin x/x$ чётная, так что левый предел совпадает с правым.

Пусть $u(x)\to 0$. Тогда отношение $\sin u(x)/u(x)$ стремится к единице в точках, где оно определено. Важно, чтобы к нулю стремился именно весь аргумент синуса.

Пример 1. Разные коэффициенты в аргументах

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}.$$

Мы дополнили числитель и знаменатель до стандартных отношений. В общем случае при $b\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$$

Если $a=0$, числитель тождественно равен нулю и ответ равен нулю. При $b=0$ исходная дробь не определена, поэтому условие нельзя опускать.

Из первого замечательного предела и непрерывности косинуса следует

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=1.$$

Тождество $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ даёт ещё одно важное следствие:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Разность с косинусом

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2.$$

Если пытаться подставить $\cos 2x=1$ до преобразования, получится неопределённость $0/0$. Тождество показывает, что числитель имеет порядок x^2, а не x.

4. Второй замечательный предел

Второй замечательный предел записывают в двух эквивалентных формах:

$$\boxed{\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e}, \qquad \boxed{\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e}.$$

В первой формуле основание должно быть положительным, что выполняется при достаточно малом u. Число e приблизительно равно 2,71828. Формула отражает накопление большого числа малых относительных изменений: каждый множитель близок к единице, но их число растёт.

Более общая форма получается заменой переменной:

$$\lim_{u\to 0}(1+au)^{b/u}=e^{ab}$$

для постоянных a, b, если рассматривается положительное основание. При $a\neq 0$ выражение переписывается как

$$(1+au)^{b/u}=\big((1+au)^{1/(au)}\big)^{ab}.$$

При $a=0$ исходная функция равна 1, что согласуется с e^0.

Пример 3. Степенная неопределённость

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}=\lim_{x\to 0}\big((1+2x)^{1/(2x)}\big)^{6}=e^{6}.$$

Основание положительно в некоторой окрестности нуля. Выражение имеет форму 1^{∞}, но эта символическая форма не означает, что ответ равен 1.

Пример 4. Последовательность

Найдём предел

$$a_n=\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n}=\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{n}.$$

Обозначим $u_n=4/(2n-3)$. Тогда $u_n\to 0$, а $nu_n\to 2$. Поэтому

$$a_n=\big((1+u_n)^{1/u_n}\big)^{nu_n}\longrightarrow e^{2}.$$

Здесь важно учитывать одновременно, насколько основание отличается от единицы и насколько быстро растёт показатель.

5. Логарифмирование степенных выражений

Если $y(x)=f(x)^{g(x)}$ и $f(x)>0$, то

$$\ln y(x)=g(x)\ln f(x).$$

Степенная неопределённость превращается в предел произведения. Если $\ln y(x)\to L$, то по непрерывности экспоненты $y(x)\to e^{L}$. Этот подход удобен, когда основание имеет более сложный вид, чем $1+ax$.

Из второго замечательного предела после логарифмирования следует

$$\boxed{\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1}.$$

С заменой $u=e^t-1$ получается

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1}.$$

Эти соотношения описывают локальное поведение логарифма и экспоненты и впоследствии входят в вывод формул производных.

Пример 5. Основание с нелинейной добавкой

$$y(x)=(1+x+x^2)^{1/x},\qquad x\to 0.$$

Положим $u=x+x^2$. Тогда

$$\ln y(x)=\frac{\ln(1+u)}{u}\cdot\frac{u}{x}=\frac{\ln(1+u)}{u}(1+x)\longrightarrow 1.$$

Следовательно, $y(x)\to e$. Добавка x^2 влияет на значение функции, но в этом пределе не меняет главный вклад.

6. Бесконечно малые и эквивалентность

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при рассматриваемом предельном переходе, если $\alpha(x)\to 0$. Две бесконечно малые α,β эквивалентны, если

$$\alpha\sim\beta\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\alpha}{\beta}\longrightarrow 1.$$

Эквивалентность всегда относится к конкретному предельному переходу. Она не является равенством функций и не позволяет считать их одинаковыми при произвольных значениях аргумента.

При $x\to 0$ справедливы основные соотношения

$$\sin x\sim x,\qquad \tan x\sim x,\qquad \ln(1+x)\sim x,$$
$$e^x-1\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\quad(\alpha\neq 0).$$

Последнее соотношение можно получить, представив степень как $e^{\alpha\ln(1+x)}$ и последовательно применив два предыдущих предела. Основание $1+x$ берётся положительным.

Если заменить множитель в произведении или частном на эквивалентный, отношение нового и исходного выражений стремится к единице. Поэтому такой способ сохраняет конечный предел и позволяет сравнивать порядки малости.

Пример 6. Комбинация разных функций

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Строгое обоснование состоит в умножении и делении на $2x$ и $3x$: возникающие отношения логарифма и экспоненты стремятся к единице. Вблизи нуля условие $1+2x>0$ выполнено.

Пример 7. Порядок числителя и знаменателя

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}.$$

Числитель эквивалентен $2x^2$, знаменатель — $3x^2$. Следовательно, предел равен $2/3$. Сначала определяют порядок обоих выражений и только затем сокращают общий масштаб.

7. Почему нельзя произвольно заменять слагаемые

В разности главные части могут взаимно уничтожиться. Например,

$$x+x^2\sim x,\qquad (x+x^2)-x=x^2.$$

Если заменить первое слагаемое на x до вычитания, получится ноль и будет потерян весь результат. По той же причине из $\sin x\sim x$ нельзя заключить, что выражение $\sin x-x$ тождественно равно нулю.

При использовании таблицы нужно проверить три пункта: аргумент малой функции действительно стремится к нулю; замена производится в допустимой структуре произведения или частного; коэффициент при аргументе и его степень сохранены. При вычитании почти равных выражений сначала применяют точное тождество, сопряжение или более точное разложение, если оно уже известно.

8. Вопросы для самопроверки

1. Где в доказательстве первого замечательного предела используются радианы?
2. Найдите $\lim_{x\to 0}\tan 4x/\sin 2x$.
3. Найдите $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{2/x}$.
4. Объясните смысл записи $1-\cos x\sim x^2/2$.
5. Вычислите $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+4x}-1)/\sin 2x$.
6. Почему замена эквивалентными величинами в разности требует дополнительного анализа?