ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 11

Способы дифференцирования. Дифференциал. Правило Лопиталя

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Логарифмическое, неявное и параметрическое дифференцирование расширяют набор способов нахождения производной. Дифференциал даёт линейное приближение, а правило Лопиталя помогает вычислять пределы при выполнении его условий.

1. Цели обучения

- Применять логарифмическое, неявное и параметрическое дифференцирование;
- Находить производные высших порядков и использовать дифференциал;
- Вычислять пределы по правилу Лопиталя, проверяя его условия.

2. Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическое дифференцирование полезно, когда переменная находится одновременно в основании и показателе степени либо функция содержит произведение многих степенных множителей. Вместо длинного раскрытия произведения сначала берут логарифм, превращая произведения в суммы и степени в коэффициенты.

Если $y(x) > 0$, то $(\ln y)' = y'/y$. Для ненулевой функции, знак которой постоянен на рассматриваемом интервале, можно использовать $\ln|y|$. После нахождения y'/y необходимо умножить результат на исходную функцию y.

Пример 1. Переменное основание и показатель

Пусть $y = x^x$, $x > 0$. Тогда

$$\ln y = x \ln x, \qquad \frac{y'}{y} = \ln x + 1, \qquad \boxed{y' = x^x(\ln x + 1)}.$$

Нельзя применять только формулу производной степени x^a, считая a постоянным, или только формулу производной a^x, считая основание постоянным: здесь изменяются обе части.

В общем случае при $u(x) > 0$

$$y = u(x)^{v(x)}, \qquad y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Первое слагаемое учитывает изменение показателя, второе — основания.

Пример 2. Произведение и частное степеней

$$y = \frac{(x^2+1)^3 \sqrt{x-1}}{(x+2)^2}, \qquad x > 1.$$

В этой области все логарифмы определены. Записываем

$$\ln y = 3\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 2\ln(x+2),$$

откуда

$$y' = \frac{(x^2+1)^3\sqrt{x-1}}{(x+2)^2} \left(\frac{6x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x+2} \right).$$

Раскрывать скобки не обязательно: такая форма сохраняет связь с исходной функцией и уменьшает объём вычислений.

3. Производная неявной функции

Зависимость между x и y может быть задана уравнением $F(x, y) = 0$, которое неудобно разрешать относительно y. Если вблизи рассматриваемой точки оно задаёт дифференцируемую функцию $y = y(x)$, то $F_x + F_y\, y' = 0$. Здесь F_x, F_y — частные производные: при вычислении одной из них другой аргумент временно считают постоянным. При непрерывности этих производных и условии $F_y \neq 0$ теорема о неявной функции гарантирует локальное представление $y(x)$, и

$$\boxed{y' = -\frac{F_x}{F_y}}.$$

Практически можно дифференцировать исходное уравнение по x, помня, что каждый множитель с y является сложной функцией. Например, производная y^2 равна $2yy'$, а производная xy — $y + xy'$.

Пример 3. Касательная к окружности

Для $x^2 + y^2 = 25$

$$2x + 2yy' = 0, \qquad y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

В точке $(3, 4)$ производная равна $-3/4$, поэтому касательная задаётся уравнением

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3), \qquad 3x + 4y = 25.$$

В точках $(5, 0)$ и $(-5, 0)$ приведённая дробь не определена; касательные к окружности там вертикальны. В общем неявном уравнении равенство $F_y = 0$ означает, что данный критерий неприменим, а не автоматически отсутствие любого локального описания.

Пример 4. Неразрешённая явно зависимость

Пусть $xe^y + y = x^2$. Дифференцируя по x, получаем

$$e^y + xe^y y' + y' = 2x, \qquad y' = \frac{2x - e^y}{xe^y + 1},$$

если знаменатель ненулевой. В слагаемом xe^y использованы одновременно правило произведения и правило сложной функции.

4. Параметрическое задание

Пусть кривая описана формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$. Если $x'(t) \neq 0$, то локально параметр можно исключить и

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}}.$$

Производная по t и производная по x различаются. Чтобы дифференцировать выражение по x, применяют оператор $\frac{d}{dx} = \frac{1}{x'(t)}\frac{d}{dt}$. Поэтому вторая производная имеет вид

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}.$$

Отношение $y''(t)/x''(t)$ в общем случае не является второй производной по x.

Пример 5. Первая и вторая производные

Пусть $x = t^2 + 1$, $y = t^3$, $t > 0$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2t}\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{3}{4t}.$$

Ограничение $t > 0$ обеспечивает ненулевую производную $x'(t)$ и выбор одной ветви. Исключив параметр, получим $y = (x - 1)^{3/2}$, $x > 1$; прямое дифференцирование подтверждает обе формулы.

5. Высшие производные

Производная производной называется второй производной: $f'' = (f')'$. Последовательно определяются $f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$, если соответствующие операции существуют. Порядок производной показывают круглые скобки: $f^{(n)}$ не означает f^n.

Для $f(x) = x^2 \sin x$ первое дифференцирование даёт $f' = 2x \sin x + x^2 \cos x$. Дифференцируем оба слагаемых:

$$f'' = 2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2 \sin x = (2 - x^2)\sin x + 4x\cos x.$$

При повторном дифференцировании правило произведения применяется заново. Для экспоненты $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$; у синуса и косинуса производные циклически повторяются через четыре шага. В механике вторая производная координаты по времени является ускорением.

6. Дифференциал и линейное приближение

Для дифференцируемой функции малое приращение представляется как

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \qquad \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \longrightarrow 0.$$

Главная линейная часть называется дифференциалом:

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}.$$

Когда аргумент независим, полагают $dx = \Delta x$, и для малых приращений используют

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x)h.$$

Это приближённое равенство. Дифференциал и полное приращение совпадают точно для линейной функции, а в общем случае отличаются остатком.

Пример 6. Приближённое вычисление

Для $\sqrt{4{,}04}$ берём $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$, $h = 0{,}04$. Значения $f(4) = 2$, $f'(4) = 1/4$ дают $\sqrt{4{,}04} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}04 = 2{,}01$. Вычислять производную следует в удобной базовой точке 4, а не в искомой точке 4,04. Чем меньше приращение и чем медленнее меняется производная поблизости, тем точнее линейная модель.

Для $y = x^\alpha$, $x > 0$, относительное изменение приближённо равно $dy/y = \alpha\, dx/x$. Например, при малой относительной погрешности радиуса относительная погрешность объёма шара приблизительно втрое больше, поскольку объём пропорционален кубу радиуса.

7. Правило Лопиталя: условия важнее операции

Пусть f, g дифференцируемы в некоторой проколотой односторонней окрестности точки a, $g \neq 0$, $g' \neq 0$, а отношение имеет неопределённость $0/0$ или ∞/∞. Если существует предел отношения производных, конечный или бесконечный, то

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Соответствующие версии действуют на бесконечности. Для двустороннего предела условия проверяют с обеих сторон и сравнивают результаты. Правило вычисляет предел исходного отношения; оно не утверждает равенства самих функций f/g и f'/g'.

Пример 7. Одно и два применения

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.$$

Для другого отношения после первого шага снова получается $0/0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Перед вторым применением нужно заново проверить условия для новой пары функций. Дифференцируют отдельно числитель и знаменатель, а не всю дробь по правилу производной частного.

Пример 8. Приведение произведения к отношению

При $x\to 0+$ выражение $x\ln x$ имеет вид $0\cdot(-\infty)$. Перепишем его:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0.$$

Из этого также следует $\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim x\ln x} = 1$. Логарифмирование превратило неопределённость 0^0 в уже рассмотренный предел.

7.1. Когда правило не даёт ответа

Если предел f'/g' не существует, это ещё не означает отсутствия предела f/g. Например, при $x\to+\infty$

$$\frac{x+\sin x}{x}=1+\frac{\sin x}{x}\longrightarrow 1,$$

но отношение производных $1+\cos x$ не имеет предела. Здесь достаточно ограниченности синуса. Следовательно, правило Лопиталя — достаточный метод при его условиях, а не универсальный критерий существования любого предела.

8. Вопросы для самопроверки

1. Почему после логарифмирования нужно умножить найденное выражение на y?
2. Найдите y' из $x^2+xy+y^2=3$ при ненулевом соответствующем знаменателе.
3. Почему для параметрической второй производной нужно ещё раз делить на $x'(t)$?
4. Приближённо вычислите $\ln(1{,}02)$ с помощью дифференциала.
5. Вычислите $\lim_{x\to+\infty}\ln x/x$ и проверьте условия правила.
6. Можно ли применять правило Лопиталя к дроби, которая после подстановки имеет вид $1/0$?