ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 10

Производная функции. Правила дифференцирования

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Производная описывает мгновенную скорость изменения функции и наклон касательной. Правильное вычисление начинается с распознавания структуры выражения: суммы, произведения, частного или сложной функции.

1. Цели обучения

- Объяснять определение производной и её геометрический смысл;
- Применять таблицу производных и основные правила дифференцирования;
- Дифференцировать сложные функции и строить касательную.

2. Приращение и определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Приращение аргумента обозначим h, а соответствующее приращение функции — $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Отношение $\Delta y/h$ показывает среднюю скорость изменения на промежутке между двумя аргументами.

Производной в точке называется конечный предел

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}.$$

Условие конечности входит в определение обычной производной. Если предел не существует или бесконечен, функция не дифференцируема в данной точке в этом смысле. Когда производная существует в каждой точке некоторого промежутка, значения $f'(x)$ образуют новую функцию.

Пример 1. Производная непосредственно по определению

Для $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h, \qquad h \neq 0.$$

Переходя к пределу, получаем $f'(x) = 2x$. Удалять h подстановкой до сокращения нельзя: исходное отношение при $h = 0$ не определено. Предел вычисляется по значениям при ненулевых малых h.

3. Геометрический и физический смысл

Отношение $\Delta y/h$ является угловым коэффициентом секущей графика. При $h \to 0$ секущая в случае существования конечной производной переходит в касательную. Поэтому уравнение касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Если $f'(x_0) = 0$, касательная горизонтальна. Сам по себе этот факт не означает экстремума: у $f(x) = x^3$ в нуле производная равна нулю, но функция проходит через эту точку, продолжая возрастать.

Пример 2. Касательная к параболе

Для $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 1$ имеем $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$. Поэтому $y = 1 + 2(x-1) = 2x-1$. Проверка состоит в принадлежности точки касательной и совпадении её углового коэффициента с производной.

Если $s(t)$ — координата движущейся точки, то $s'(t)$ является мгновенной скоростью. Для $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2$

$$v(t) = 3t^2 - 6t.$$

В момент $t = 1$ скорость равна -3: координата убывает. В момент $t = 2$ скорость равна нулю. Знак скорости указывает направление движения по выбранной оси, а её модуль — быстроту движения.

4. Дифференцируемость и непрерывность

Если $f'(x_0)$ существует, то

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \longrightarrow 0.$$

Следовательно, дифференцируемая функция непрерывна. Обратное утверждение неверно.

Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в нуле, но разностное отношение в этой точке равно $|h|/h$. Справа оно равно 1, слева -1, поэтому производная не существует. У графика

в нуле имеется угол. Для проверки производной в точке соединения разных формул нужно сравнивать соответствующие односторонние пределы.

5. Основные формулы производных

На тех интервалах, где функции определены и дифференцируемы,

$$(C)' = 0, \qquad (x)' = 1, \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

Для произвольной вещественной степени удобно рассматривать $x > 0$. У целых степеней область может быть шире. В формулах логарифмов требуется $x > 0$; основание $a > 0$, $a \neq 1$. Формула $(\ln|x|)' = 1/x$ действует при $x \neq 0$.

Дополнительные тригонометрические формулы:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

В первой знаменатель должен быть ненулевым, во второй тоже. Для обратных тригонометрических функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1),$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Таблица сокращает вычисления, но не отменяет проверки области определения и внутренних аргументов.

5.1. Как возникают табличные формулы

Например, для экспоненты

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \longrightarrow e^x$$

по замечательному пределу из предыдущей лекции. Для синуса используем формулу суммы:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \, \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \, \frac{\sin h}{h}.$$

Первое отношение стремится к нулю, второе — к единице, поэтому результат равен $\cos x$. Это также объясняет, почему стандартная формула предполагает радианную меру аргумента.

6. Правила дифференцирования

Для дифференцируемых функций $u(x), v(x)$ и постоянного числа c

$$(cu)' = cu', \qquad (u+v)' = u' + v', \qquad \boxed{(uv)' = u'v + uv'}.$$

В произведении возникают два слагаемых, потому что изменяются оба множителя. Формула $(uv)' = u'v'$ неверна.

Обоснование правила произведения получается добавлением и вычитанием промежуточного слагаемого:

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\,v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

При переходе к пределу используется непрерывность v, следующая из её дифференцируемости.

Для частного при $v(x) \neq 0$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

В числителе важен порядок слагаемых, в знаменателе стоит квадрат исходного знаменателя. После дифференцирования область исходной функции сохраняет значение, даже если формула ответа допускает более широкую область.

Пример 3. Произведение

Для $y = x^2 e^{3x}$ сначала выделяем два множителя. Получаем

$$y' = 2x\,e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} = e^{3x}(2x + 3x^2).$$

Множитель 3 возникает из производной внутреннего аргумента $3x$.

Пример 4. Частное

Пусть $y = \ln x/(1+x^2)$, $x > 0$. Тогда

$$y' = \frac{\dfrac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2}.$$

Производная знаменателя равна $2x$, но знаменатель окончательной формулы равен $(1+x^2)^2$, а не $2x$. При $x = 1$ значение производной равно $1/2$.

7. Производная сложной функции

Если $y = f(u)$, $u = g(x)$, то при дифференцируемости обеих функций

$$\boxed{y' = f'(g(x))\,g'(x)}.$$

Сначала дифференцируют внешнюю функцию, сохраняя внутренний аргумент, затем умножают на производную этого аргумента. При нескольких вложенных уровнях правило применяют последовательно.

Пример 5. Степень выражения

$$y = (3x^2 + 1)^5, \qquad y' = 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 + 1)^4.$$

Раскрывать пятую степень перед дифференцированием не требуется. Внешняя функция — пятая степень, внутренняя — $3x^2 + 1$.

Пример 6. Три уровня зависимости

$$y = \sin^2(2x), \qquad y' = 2\sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 4\sin(2x)\cos(2x).$$

Внешняя операция — возведение в квадрат, затем следует синус, затем линейный аргумент $2x$. Пропуск последнего множителя является типичной ошибкой. Аналогично $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$, а $(\ln(1 + x^2))' = 2x/(1 + x^2)$.

8. Порядок решения и самопроверка

Перед вычислением определяют область функции и внешнюю операцию: сумму, произведение, частное или композицию. Затем выбирают соответствующее правило, дифференцируют составные части и лишь после этого упрощают выражение. Проверять результат полезно по частным значениям, знакам и сравнению со случаем простой функции.

1. Чем производная отличается от отношения конечных приращений?
2. Почему непрерывность не гарантирует дифференцируемости?
3. Найдите производные $x\sin x$, $(x + 1)/(x - 1)$, $e^{\sin x}$.
4. Составьте касательную к $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$.
5. Объясните каждый множитель в производной $\cos(3x^2)$.
6. Почему у функции $\sqrt{x}$ нет конечной производной справа в нуле?