ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 12

Первообразная и неопределённый интеграл

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Неопределённый интеграл представляет семейство первообразных, отличающихся постоянной на одном интервале. Основной способ проверки результата — дифференцирование.

1. Цели обучения

- Объяснять связь первообразной и неопределённого интеграла;
- Находить интегралы с помощью линейности и основных табличных формул;
- Проверять ответ дифференцированием и учитывать область определения.

2. Первообразная как обратная задача

При дифференцировании по известной функции находят скорость её изменения. При интегрировании решают обратную задачу: по производной восстанавливают функцию.

Функция F называется **первообразной** для f на интервале I, если

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{для всех } x \in I.$$

Например, $F(x) = x^3$ является первообразной для $f(x) = 3x^2$. Но такой же производной обладают $x^3 + 2$, $x^3 - 7$ и вообще $x^3 + C$, где C — постоянное число.

Если F и G — две первообразные одной функции на интервале, то $(F-G)'=0$. По теореме о среднем значении для любых $a<b$ внутри этого интервала

$$(F-G)(b)-(F-G)(a)=(F-G)'(\xi)(b-a)=0.$$

Следовательно, $F-G$ постоянно. Поэтому все первообразные на одном интервале образуют семейство

$$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C}.$$

Это семейство называется **неопределённым интегралом**. Символ dx указывает переменную интегрирования. Неопределённый интеграл не является одним числом: число получится позже при рассмотрении определённого интеграла с границами.

3. Область определения и постоянная интегрирования

Утверждение о единой постоянной относится к интервалу. Если область разбита на несколько несвязных частей, на каждой части постоянная может быть своей.

Например, функция $1/x$ не определена при $x=0$. На интервалах $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ первообразная имеет вид $\ln|x|+C$, но выбор постоянных на этих двух интервалах независим. Нельзя считать, что первообразная автоматически продолжается через точку, в которой исходная функция не определена.

Пример 1. Восстановление по начальному условию

Найдём F, если $F'(x)=2x-3$ и $F(2)=4$. Сначала записываем всё семейство:

$$F(x)=x^2-3x+C.$$

Из условия в точке 2 получаем $4-6+C=4$, значит, $C=6$. Искомая функция $F(x)=x^2-3x+6$. Таким образом, интегрирование восстанавливает функцию с точностью до постоянной, а дополнительное значение определяет эту постоянную.

4. Свойства неопределённого интеграла

Линейность дифференцирования приводит к линейности интегрирования:

$$\int\bigl(af(x)+bg(x)\bigr)\,dx=a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx,$$

где a,b постоянны. При записи окончательного семейства достаточно одной произвольной постоянной C: сумма нескольких независимых постоянных также является произвольной постоянной.

Если $F'=f$, то дифференцирование ответа возвращает подынтегральную функцию. Это основной и наиболее надёжный способ проверки интеграла. Для постоянной c

$$\int c\,dx=cx+C,$$

а не просто C, если $c\neq 0$.

Универсального правила, позволяющего интегрировать произведение как произведение интегралов, нет. Например, $\int x^2\,dx = x^3/3 + C$, тогда как произведение двух выражений $x^2/2$ даёт $x^4/4$, производная которого равна x^3, а не x^2.

5. Основная таблица

Таблица интегралов получается чтением таблицы производных в обратном направлении:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0),$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

Для произвольной вещественной α степенная формула рассматривается на $x > 0$; для некоторых степеней область шире. Исключение $\alpha = -1$ принципиально: знаменатель $\alpha + 1$ обратился бы в ноль, и вместо степенной первообразной возникает логарифм.

Тригонометрические формулы:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

В последних двух формулах интегрирование выполняют на интервалах, не содержащих нулей соответствующего знаменателя.

Формулы, связанные с обратными тригонометрическими функциями:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (|x| < 1).$$

При $a > 0$ полезны также масштабированные варианты

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Вторая формула действует при $|x| < a$. Каждую строку таблицы можно проверить дифференцированием правой части с учётом производной внутреннего аргумента.

6. Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование сводит выражение к сумме табличных функций с помощью линейности и простых алгебраических преобразований.

Пример 2. Сумма табличных слагаемых

$$\int \left(3x^2 - \frac{4}{x} + 2\cos x\right) dx = x^3 - 4\ln|x| + 2\sin x + C.$$

Проверка:

$$\left(x^3 - 4\ln|x| + 2\sin x + C\right)' = 3x^2 - \frac{4}{x} + 2\cos x.$$

Проверка выполняется при $x \neq 0$, на любом из двух интервалов области определения.

Пример 3. Предварительное преобразование дроби

Найдём $\int (x^2+1)/\sqrt{x}\,dx$ при $x > 0$. Делим каждый член числителя на знаменатель:

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x}} = x^{3/2} + x^{-1/2}.$$

Теперь применима степенная формула:

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + 2\sqrt{x} + C.$$

Оба показателя сначала увеличиваются на единицу, затем выполняется деление на полученный показатель. В частности, для $x^{-1/2}$ результат равен $2x^{1/2}$, а не $x^{1/2}/2$.

Пример 4. Раскрытие скобок

$$\int (2x+1)^2\,dx = \int (4x^2 + 4x + 1)\,dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$$

Здесь раскрытие квадрата упрощает задачу. Для высокой степени линейного выражения удобнее использовать правило внутреннего аргумента, рассмотренное ниже.

7. Линейный внутренний аргумент

Если $F' = f$ и $a \neq 0$, то по правилу сложной функции

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = f(ax+b).$$

Поэтому

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}.$$

Коэффициент $1/a$ компенсирует множитель a, который появляется при дифференцировании внутреннего аргумента.

Пример 5. Масштабирование аргумента

$$\int e^{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x-1} + C, \qquad \int \cos(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C.$$

Для $\int dx/(2x{+}5)$ результат равен $\frac{1}{2}\ln|2x{+}5|{+}C$, а для $\int dx/(1{+}4x^2)$ — $\frac{1}{2}\arctan(2x){+}C$. Все коэффициенты проверяются обратным дифференцированием.

Формула $\int (2x+1)^2\,dx = (2x+1)^3/6 + C$ даёт другой вид ответа из примера 4. После раскрытия куба разница между двумя записанными первообразными равна постоянной $1/6$, которая поглощается C. Разные на вид ответы могут описывать одно семейство.

8. Первообразная функции с модулем

Пример 6. Согласование на двух участках

Для $f(x) = |x|$ отдельно имеем $f(x) = -x$ при $x < 0$ и $f(x) = x$ при $x > 0$. Поэтому удобно взять

$$F(x) = \begin{cases} -x^2/2, & x < 0, \\ x^2/2, & x \geq 0, \end{cases} \qquad F(x) = \frac{x|x|}{2}.$$

При $x \neq 0$ производная очевидна. В нуле

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{2} = 0 = |0|.$$

Следовательно, $\int |x|\,dx = x|x|/2 + C$ на всей прямой. Если записывать разные постоянные на двух участках, для первообразной на всей прямой их необходимо согласовать в нуле. Иначе возникнет скачок, несовместимый с дифференцируемостью.

9. Типичные ошибки и самопроверка

Перед применением таблицы полезно упростить дроби и степени и проверить область определения. Нельзя забывать постоянную, применять степенную формулу к x^{-1} или игнорировать коэффициент внутреннего аргумента. При сомнении вычисляют производную предполагаемого ответа: она должна совпасть с исходной функцией на всём рассматриваемом интервале.

1. Почему две первообразные на интервале отличаются постоянной?
2. Чем отличаются $\int dx/x$ и $\int dx/x^2$?
3. Найдите $\int (5x^4 - 2/\sqrt{x})\,dx$ и проверьте ответ.
4. Найдите первообразную $f(x) = \cos 2x$, принимающую значение 3 при $x = 0$.
5. Почему $(2x+1)^3/6$ и $4x^3/3 + 2x^2 + x$ задают одно семейство первообразных?
6. Может ли функция со скачком быть первообразной на интервале, содержащем точку скачка?