ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 13

Замена переменной и интегрирование по частям

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Подстановка обращает правило дифференцирования сложной функции, а интегрирование по частям — правило производной произведения. Метод выбирают по структуре подынтегрального выражения.

1. Цели обучения

- Распознавать внутреннюю функцию и выполнять замену переменной;
- Выбирать u и $\mathrm{d}v$ в формуле интегрирования по частям;
- Проверять результат дифференцированием и обосновывать выбор метода.

2. Общий принцип выбора метода

Не каждый интеграл сразу узнаётся в таблице. Сначала полезно раскрыть простые скобки, разделить многочлен на знаменатель, записать корни как степени и выделить постоянные множители. Если выражение остаётся сложным, выбирают преобразование, которое приведёт его к уже известной форме.

Два основных метода основаны на правилах дифференцирования. Замена переменной обращает правило производной сложной функции. Интегрирование по частям обращает правило производной произведения. Поэтому перед вычислением важно увидеть структуру подынтегрального выражения.

3. Замена переменной: формула и обоснование

Если $F'(u) = f(u)$, а $u = \varphi(x)$ дифференцируема, то

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Следовательно,

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C}.$$

В обозначениях дифференциалов это записывается как $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)\,dx$. Замена должна преобразовать всё выражение: после перехода к u в новом интеграле не должны оставаться независимые символы x и dx.

Для обратной подстановки $x = \psi(u)$ используют $dx = \psi'(u)\,du$. Если для выражения x через u выбирается ветвь обратной функции, необходимо указать интервал, на котором эта ветвь подходит.

Пример 1. Внутренняя функция и её производная

$$\int 2x\cos(x^2+1)\,dx.$$

Берём $u = x^2 + 1$, тогда $du = 2x\,dx$. Получаем

$$\int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(x^2+1) + C.$$

Производная ответа равна $2x\cos(x^2+1)$, что подтверждает правильность замены. Коэффициент $2x$ был не лишним усложнением, а производной внутреннего выражения.

Пример 2. Производная знаменателя в числителе

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Полагаем $u = 1 + x^2$, $du = 2x\,dx$, поэтому $x\,dx = du/2$. Тогда

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Модуль здесь можно не писать, поскольку $1 + x^2 > 0$. В общем случае формула

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$$

применяется на интервалах, где $g(x) \neq 0$.

Пример 3. Замена с дополнительным преобразованием

Рассмотрим $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$. Выделяем $x^3dx = x^2(x\,dx)$ и вводим $u = 1 + x^2$. Тогда $x^2 = u - 1$, $x\,dx = du/2$:

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (u-1)u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\int (u^{3/2} - u^{1/2})\,du.$$

После табличного интегрирования и возврата к x

$$\boxed{\frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C}.$$

Проверка производной даёт

$$x(1+x^2)^{3/2} - x(1+x^2)^{1/2} = x^3\sqrt{1+x^2}.$$

Здесь существенно было выразить оставшийся множитель x^2 через новую переменную.

4. Тригонометрическая подстановка

При корнях вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $a>0$, полезна подстановка $x = a\sin t$. На интервале $-\pi/2 < t < \pi/2$ косинус положителен, поэтому

$$dx = a\cos t\,dt, \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t.$$

Выбор интервала позволяет убрать модуль при извлечении квадратного корня.

Пример 4. Интеграл от корня

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt.$$

Получаем $\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$. Возвращаясь к x, имеем

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C}$$

при $|x|<a$. Этот пример показывает, что удачная замена может превратить корень в квадрат тригонометрической функции, после чего применяется точное тождество.

5. Интегрирование по частям

Из правила дифференцирования произведения

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

после интегрирования следует

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}.$$

Метод заменяет один интеграл другим. Он полезен, когда u при дифференцировании упрощается, а для dv легко найти первообразную v. Наличие произведения само по себе ещё не гарантирует удачность выбора.

Часто за u берут многочлен, логарифм или обратную тригонометрическую функцию. Но это ориентир, а не обязательное правило. Перед вычислением нового интеграла стоит оценить, стал ли он проще исходного.

Пример 5. Многочлен и экспонента

Найдём $\int xe^x\,dx$. Выбираем $u = x$, $dv = e^x\,dx$; тогда $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C.$$

Если выбрать $u = e^x$, $dv = x\,dx$, получится интеграл от $x^2e^x/2$, который сложнее исходного. Выбор оценивается по результату преобразования, а не только по возможности формально применить формулу.

Пример 6. Логарифм как произведение на единицу

$$\int \ln x\,dx, \qquad x > 0.$$

Пишем $\ln x = \ln x \cdot 1$ и берём $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = dx/x$, $v = x$, поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

Производная $x\ln x - x$ равна $\ln x + 1 - 1 = \ln x$. Слагаемое $-x$ необходимо: оно компенсирует единицу, появляющуюся при дифференцировании произведения.

6. Повторное интегрирование по частям

Пример 7. Квадратичный множитель

$$I = \int x^2e^x\,dx.$$

Полагаем $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$. Тогда

$$I = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

Второй интеграл уже найден в примере 5. Подставляем:

$$I = x^2e^x - 2(x-1)e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Каждый шаг понижает степень многочлена. Для произведения многочлена степени n на e^x потребуется конечное число повторений. Проверка последней формулы особенно проста: слагаемые от производной многочлена сокращаются с частью слагаемых от производной экспоненты.

7. Возвращение к исходному интегралу

Иногда новый интеграл не становится табличным, но после повторного применения метода возвращается исходный. Тогда возникает линейное уравнение для искомой первообразной. В промежуточных записях постоянные объединяем в одну в окончательном ответе.

Пример 8. Экспонента и косинус

Обозначим $I = \int e^x\cos x\,dx$, $J = \int e^x\sin x\,dx$. При выборе $u = \cos x$, $dv = e^x\,dx$

$$I = e^x\cos x + J.$$

Для второго интеграла $u = \sin x$, $dv = e^x\,dx$, откуда

$$J = e^x\sin x - I.$$

Подстановка даёт $2I = e^x(\cos x + \sin x)$ с точностью до постоянной, следовательно,

$$\boxed{I = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C}.$$

Дифференцирование подтверждает ответ: слагаемые с синусом взаимно уничтожаются, а два слагаемых с косинусом складываются.

8. Как выбирать между методами

Если рядом с выражением $g(x)$ присутствует множитель $g'(x)$, в первую очередь рассматривают замену $u = g(x)$. Если произведение содержит функцию, которая заметно упрощается при дифференцировании, пробуют интегрирование по частям. Иногда нужны оба метода последовательно.

Например, интеграл $\int x \ln(1+x^2)\,dx$ удобно сначала преобразовать заменой $u = 1+x^2$:

$$\int x \ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \ln u\,du = \frac{1}{2}\big(u\ln u - u\big) + C.$$

Возвращение к исходной переменной даёт

$$\frac{1}{2}\left((1+x^2)\ln(1+x^2) - (1+x^2)\right) + C.$$

Здесь подстановка выделила стандартный логарифмический интеграл, а его вычисление опирается на интегрирование по частям.

9. Вопросы для самопроверки

1. Какое правило дифференцирования лежит в основе каждого метода?
2. Почему после замены нельзя оставлять в одном интеграле несогласованные переменные?
3. Найдите $\int 3x^2 e^{x^3}\,dx$ и проверьте ответ.
4. Выберите u, dv для $\int x\cos x\,dx$ и выполните вычисление.
5. Найдите $\int x^2 \sin x\,dx$ повторным применением формулы.
6. Почему при тригонометрической подстановке необходимо следить за знаком корня?