ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 1

Лекция 14

Определённый интеграл. Формула Ньютона–Лейбница

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором примеров.

Основная идея: Определённый интеграл описывает накопленную величину и вычисляется по формуле Ньютона–Лейбница. При замене переменной нужно согласованно преобразовывать подынтегральное выражение, дифференциал и пределы.

1. Цели обучения

- Объяснять определённый интеграл как предел интегральных сумм;
- Применять свойства интеграла и формулу Ньютона–Лейбница;
- Выполнять подстановку с изменением пределов и проверять знак результата.

2. От суммы малых вкладов к интегралу

Во многих задачах искомая величина складывается из большого числа небольших вкладов. Площадь под графиком приближают суммой площадей прямоугольников, перемещение при переменной скорости — суммой перемещений на коротких промежутках времени. Определённый интеграл выражает предел таких сумм при измельчении разбиения.

Разобьём отрезок $[a, b]$, где $a < b$, точками

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

В каждом промежутке выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется **интегральной суммой**. Число $\lambda = \max_i \Delta x_i$ характеризует размер самого длинного промежутка разбиения. Если при $\lambda \to 0$ суммы стремятся к одному числу независимо от разбиения и выбора точек, это число называется определённым интегралом:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}.$$

Числа a, b — нижний и верхний пределы интегрирования. Переменная x является внутренним обозначением: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$. В отличие от неопределённого интеграла, результат при заданных пределах представляет собой число, поэтому постоянная C в ответ не добавляется.

Всякая непрерывная на $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке. Это достаточное условие: некоторые разрывные функции также интегрируемы. В данной лекции основные формулы применяются прежде всего к непрерывным функциям.

Пример 1. Вычисление непосредственно по определению

Найдём $\int_0^1 x\,dx$. При равномерном разбиении $\Delta x_i = 1/n$ и выборе правых концов $\xi_i = i/n$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Функция $f(x) = x$ непрерывна, поэтому интеграл существует и равен пределу этих сумм:

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

С геометрической точки зрения получена площадь прямоугольного треугольника с катетами, равными единице. Определение объясняет смысл интеграла, но для вычислений обычно удобнее использовать первообразную.

3. Геометрический смысл и знак интеграла

Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то интеграл равен площади фигуры между графиком, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$. Если график проходит ниже оси, соответствующий вклад имеет отрицательный знак. Поэтому при перемене знака функции интеграл даёт **алгебраическую площадь**, то есть разность положительных и отрицательных вкладов.

Для полной геометрической площади используют

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

На практике находят нули функции, разбивают отрезок на части постоянного знака и на каждой части выбирают нужный знак подынтегрального выражения.

Пример 2. Нулевой интеграл и ненулевая площадь

Для $f(x) = x$ на $[-1, 1]$ площади двух треугольников равны. Поэтому

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} |x|\,dx = -\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = 1.$$

Равенство интеграла нулю не означает, что функция всюду равна нулю. В этом примере положительный и отрицательный вклады компенсируются.

4. Основные свойства

Пусть функции интегрируемы на рассматриваемых отрезках, а α, β — постоянные. Тогда справедливы следующие правила.

1. **Линейность:**
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. **Ориентация и нулевой промежуток:**
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. **Аддитивность по промежутку:** если $a \le c \le b$, то
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. **Сравнение:** если $f(x) \le g(x)$ и $a < b$, то
$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$
В частности, интеграл неотрицательной функции неотрицателен.

5. **Оценка модуля:**
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Линейность и аддитивность следуют из соответствующих свойств конечных сумм. Свойство сравнения отражает тот факт, что при одинаковых положительных ширинах более высокие прямоугольники имеют большую площадь.

Если $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$, то

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)}.$$

Такая оценка полезна до точного вычисления: она помогает проверить знак и порядок величины ответа. Например, на $[0, 1]$ выполняется $1 \le e^x \le e$, поэтому $1 \le \int_0^1 e^x\,dx \le e$.

5. Интеграл с переменным верхним пределом

Зафиксируем a и определим функцию

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Если f непрерывна, то G дифференцируема во внутренних точках отрезка и $G'(x) = f(x)$. Действительно, из аддитивности

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Вычитая $f(x)$, получаем оценку

$$\left|\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x)\right| \le \max_{t \text{ между } x \text{ и } x+h} |f(t) - f(x)|.$$

Правая часть стремится к нулю по непрерывности. Таким образом, накопленная площадь изменяется со скоростью, равной текущему значению подынтегральной функции. Это устанавливает связь между интегрированием и дифференцированием.

6. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть f непрерывна на $[a, b]$, а F — любая её первообразная. Функции F и G имеют одинаковые производные, поэтому отличаются постоянной. Из $G(a) = 0$ следует $G(x) = F(x) - F(a)$. При $x = b$ получаем

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b}.$$

Сначала находят первообразную, затем подставляют верхний предел и вычитают значение при нижнем. Если к F добавить постоянную, она сократится в разности, поэтому выбор первообразной не влияет на результат.

Пример 3. Многочлен

$$\int_0^2 (3x^2 - 1)\,dx = [x^3 - x]_0^2 = (8 - 2) - (0 - 0) = 6.$$

Вычитание относится ко всему значению первообразной в нижнем пределе. Скобки особенно важны, если нижний предел отрицателен или первообразная содержит несколько слагаемых.

Пример 4. Логарифмическая первообразная

На отрезке $[1, e]$ функция $1/x$ непрерывна. Поэтому

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^e = 1 - 0 = 1.$$

Условие непрерывности проверяется на всём отрезке. Для выражения $\int_{-1}^{1} dx/x^2$ формулу нельзя применять через точку 0: функция там не определена и неограничена. Это уже задача о несобственном интеграле, которая требует отдельного определения; формальная подстановка в $-1/x$ не даёт значения обычного определённого интеграла.

7. Замена переменной и преобразование пределов

Пусть φ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, а f непрерывна на промежутке, содержащем все значения $\varphi(t)$. Тогда

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du}.$$

Формула следует из производной $F(\varphi(t))$ и формулы Ньютона–Лейбница. При прямом применении этой записи не требуется решать уравнение $u = \varphi(t)$ относительно t. Если же используется обратная подстановка, нужно выбирать подходящую ветвь и учитывать область определения.

При переходе к новой переменной меняют и дифференциал, и оба предела. После этого вычисления полностью выполняются в новой переменной, а возвращаться к старой для числового ответа не нужно.

Пример 5. Замена с возрастающей функцией

$$I = \int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

Положим $u = 1 + x^2$, $du = 2x\,dx$. При $x = 0$ получаем $u = 1$, при $x = 1$ — $u = 2$. Следовательно,

$$I = \int_{1}^{2} \frac{du}{u} = [\ln u]_1^2 = \ln 2.$$

Сохранение старых пределов $0, 1$ после замены привело бы к другому интегралу. Пределы являются значениями той переменной, которая стоит под знаком интеграла.

Пример 6. Убывающая замена и знак

В интеграле $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ введём $u = \cos x$. Тогда $du = -\sin x\,dx$, а пределы меняются с $0, \pi/2$ на $1, 0$:

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,dx = -\int_{1}^{0} du = \int_{0}^{1} du = 1.$$

Здесь знак минус от дифференциала согласуется с обратным порядком новых пределов. Нельзя одновременно переставить пределы и забыть изменить знак.

8. Среднее значение функции

Для интегрируемой функции на $[a, b]$, $a < b$, среднее значение определяется формулой

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Это высота прямоугольника, площадь которого равна интегралу. Для непрерывной функции существует точка $c \in [a, b]$, в которой $f(c) = f_{\text{ср}}$: среднее лежит между минимумом и максимумом, а непрерывная функция принимает все промежуточные значения.

Например, для $f(x) = x^2$ на $[0, 2]$

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Это значение достигается при $c = 2/\sqrt{3}$. Среднее значение функции обычно не совпадает с её значением в середине отрезка: здесь $f(1) = 1$, а $f_{\text{ср}} = 4/3$.

9. Вопросы для самопроверки

1. Что должно стремиться к нулю в определении интеграла и почему одного увеличения числа промежутков недостаточно?
2. Чем отличаются определённый и неопределённый интегралы?
3. Вычислите $\int_{-1}^{2}(2x+1)\,dx$ и отдельно найдите геометрическую площадь между графиком и осью.
4. Найдите $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$, явно записав новые пределы.
5. Почему нельзя применять формулу Ньютона–Лейбница через внутреннюю точку, где подынтегральная функция неограничена?
6. Найдите среднее значение $\cos x$ на $[0, \pi/2]$.