ЛЕКЦИЯ 6

Интеграл вдоль кривой: длина, работа и потенциал

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Интегрирование по длине дуги и по координатам отвечает на разные вопросы. Потенциал позволяет вычислять работу по концам пути, а формула Грина связывает замкнутый контур с его внутренней областью.

Цели обучения

- Параметризовать кривые для интегралов двух родов.
- Проверять независимость интеграла от пути и восстанавливать потенциал.
- Применять формулу Грина для циркуляции и площади.

Два разных способа суммировать вдоль кривой

Кривая может нести распределённую массу, а движение вдоль неё может совершать работу против силы. В первом случае суммируются длины малых участков, во втором — направленные перемещения. Поэтому различают криволинейные интегралы первого и второго рода.

Пусть гладкая кривая задана $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$, причём $r'(t) \neq 0$ внутри гладких участков. Для кусочно-гладкого пути интеграл вычисляют отдельно по частям и складывают. Параметризация должна обходить нужную кривую с указанной кратностью: повторный обход повторяет вклад.

Интеграл по длине дуги

Элемент длины равен $ds = |r'(t)|dt$. Поэтому

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(r(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt.$$

Изменение ориентации не меняет результат: длина не зависит от направления обхода. При $f = 1$ получается длина кривой, при $f = \rho \ge 0$ — масса проволоки с линейной плотностью ρ.

Разбор A. Неоднородная дуга

На верхней полуокружности радиуса 2 зададим плотность $\rho = 1 + y$. Параметризация $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \pi$ даёт $ds = 2dt$. Следовательно,

$$m = \int_0^{\pi} (1 + 2\sin t) 2\, dt = 2\pi + 8.$$

Плотность всюду положительна. При постоянной единичной плотности масса равнялась бы длине 2π; добавка 8 возникает из-за зависимости от высоты.

Интеграл по координатам и работа поля

Для векторного поля $F = (P, Q, R)$ интеграл второго рода определяется как

$$\int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt.$$

Здесь $dx = x'dt$, $dy = y'dt$, $dz = z'dt$ сохраняют знаки. При смене ориентации интеграл меняет знак. В механической интерпретации он даёт работу силы вдоль пути, а по замкнутому контуру называется циркуляцией.

Разбор B. Прямое вычисление работы

Пусть $F = (y, x)$, путь $x = t$, $y = t^2$, $0 \le t \le 1$. Тогда

$$\int_C y\, dx + x\, dy = \int_0^1 (t^2 + 2t^2)\, dt = 1.$$

Для интеграла первого рода от той же скалярной функции вместо dx и dy возник бы множитель $\sqrt{1 + 4t^2}$. Подмена этих двух типов интегралов меняет смысл задачи.

Полный дифференциал и потенциал

Если существует функция Φ с $\nabla\Phi = F$, поле называется потенциальным, а выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом $d\Phi$. Цепное правило даёт

$$\int_C d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A).$$

Работа зависит только от концов пути. По любому замкнутому пути она равна нулю. Обратно, в связной области, где любые две точки можно соединить допустимым путём, независимость интеграла от пути позволяет определить потенциал интегралом от фиксированной точки.

В плоскости необходимое условие для гладкого потенциального поля — $P_y = Q_x$. Для поля класса C^1 в открытой односвязной области оно также достаточно. Односвязность исключает отверстия, вокруг которых возможна ненулевая циркуляция при нулевом локальном роторе.

Разбор C. Восстановление функции по дифференциалу

Пусть $P = 2xy + 3$, $Q = x^2 + 2y$. Условие $P_y = Q_x = 2x$ выполнено на всей плоскости. Интегрируем первое равенство $\Phi_x = P$ по x:

$$\Phi = x^2 y + 3x + h(y).$$

После дифференцирования по y получаем $x^2 + h'(y) = x^2 + 2y$, значит, $h = y^2 + C$. Работа от $(0,0)$ до $(1,2)$ равна $2 + 3 + 4 = 9$ по любому кусочно-гладкому пути. «Постоянная» после интегрирования по x была функцией от y; замена её числом потеряла бы часть решения.

Почему область определения существенна

Для поля

$$F = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

вне начала координат выполнено $P_y = Q_x$. Однако на единичной окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$ интеграл равен

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Глобального однозначного потенциала на всей проколотой плоскости нет. Это не противоречит достаточному признаку: область не односвязна. Локальные проверки производных должны сопровождаться проверкой геометрии области.

Формула Грина

Пусть D — плоская область с положительно ориентированной кусочно-гладкой границей, а P, Q имеют непрерывные первые производные в окрестности её замыкания. Тогда

От контура к внутренней области

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA.$$

Положительная ориентация оставляет область слева по ходу движения. Внешняя граница обходится против часовой стрелки; границы отверстий — по часовой.

Для $P = -y$, $Q = x$ и диска радиуса a получаем циркуляцию $\iint_D 2\,dA = 2\pi a^2$. Прямое вычисление по окружности даёт ту же величину: $-y\,dx + x\,dy = a^2 dt$.

Взяв $P = -y/2$, $Q = x/2$, получаем формулу площади

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x\,dy - y\,dx).$$

Для эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ выражение в скобках равно $ab\,dt$, поэтому $S = \pi ab$. При обратной ориентации контурный интеграл отрицателен; геометрическая площадь требует согласованного выбора обхода.

Разбор D. Одни концы, разная работа

Поле $F = (0, x)$ не является потенциальным на плоскости: $Q_x - P_y = 1$. Соединим $(0,0)$ с $(1,1)$ двумя путями по сторонам единичного квадрата. На первом пути идём сначала вправо, затем вверх. Горизонтальный участок даёт нуль, потому что $dy = 0$, а вертикальный — $\int_0^1 1\,dy = 1$. На втором пути идём сначала вверх при $x = 0$, затем вправо: оба вклада нулевые. Значит, одинаковые начальная и конечная точки не определяют работу однозначно.

По диагонали $x = t$, $y = t$, $0 \le t \le 1$, работа равна $\int_0^1 t\,dt = 1/2$. Разность работ по двум ломаным равна интегралу по замкнутой границе квадрата. При обходе первого пути вперёд, а второго назад ориентация положительная, и формула Грина даёт

$$1 - 0 = \iint_{[0,1]^2} 1\,dA = 1.$$

Пример одновременно показывает смысл ориентации, зависимости от пути и перехода от контура к площади.

Задания для самостоятельного разбора

1. Найдите $\int_C (x + y)\,ds$ по отрезку от $(0,0)$ до $(1,1)$.
2. Вычислите работу $(y, -x)$ по единичной окружности против часовой стрелки.
3. Восстановите потенциал поля $(2x + y, x + 2y)$.
4. Примените формулу Грина к $P = 0$, $Q = x^2$ на единичном квадрате.
5. Почему формулу Грина нельзя непосредственно применить к полю с особенностью в центре диска?