ЛЕКЦИЯ 15

Системы дифференциальных уравнений

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Связанные величины образуют единую векторную траекторию. Матричная запись показывает структуру системы, а исключение и собственные направления дают способы её решения.

Цели обучения

- Записывать нормальную систему и задачу Коши.
- Решать линейные системы исключением и матричным методом.
- Использовать фундаментальную матрицу и вариацию постоянных.

Несколько величин меняются одновременно

Нормальная система первого порядка имеет вид

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^{\mathsf{T}}.$$

Задача Коши дополняется условием $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, то есть n скалярными начальными данными. Решение представляет собой согласованную векторную траекторию; компоненты нельзя выбирать независимо.

Если $\mathbf{F}$ непрерывна и локально липшицева по вектору $\mathbf{y}$, задача имеет единственное локальное решение. Для линейной системы $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ непрерывность всех элементов A и $\mathbf{b}$ обеспечивает единственное решение на всём интервале непрерывности коэффициентов.

Уравнение высокого порядка как система

В уравнении $y'' + 3y' + 2y = f(t)$ положим $y_1 = y$, $y_2 = y'$. Тогда

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Первая строка сохраняет определение y_2, вторая воспроизводит исходное уравнение. Значения $y(t_0)$ и $y'(t_0)$ становятся компонентами начального вектора. Так методы систем применяются к скалярному уравнению.

Метод исключения

Разбор A. Сведение к одному уравнению

Рассмотрим $x' = x + y$, $y' = 4x + y$. Из первой строки $y = x' - x$. Дифференцируем её и используем вторую:

$$x'' = x' + y' = x' + 4x + y = 2x' + 3x.$$

Получаем $x'' - 2x' - 3x = 0$ с корнями 3 и -1. Поэтому

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \qquad y = x' - x = 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t}.$$

Коэффициенты второй компоненты связаны с коэффициентами первой; вводить для y новые независимые постоянные нельзя. Для $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ имеем $C_1 + C_2 = 1$, $2C_1 - 2C_2 = 0$, поэтому обе постоянные равны $1/2$.

Пара должна удовлетворять обеим исходным строкам. При исключении деление на выражение, способное обращаться в нуль, может потерять решения; здесь коэффициент при y постоянно равен единице.

Собственные значения и собственные направления

Для системы $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ с постоянной матрицей ищут $\mathbf{y} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Получаем $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, поэтому λ — собственное значение, а ненулевой $\mathbf{v}$ — соответствующий собственный вектор. При наличии n независимых собственных векторов общее решение равно

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t}\mathbf{v}_k.$$

В разборе A матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ имеет многочлен $(1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. Для $\lambda = 3$ можно взять $\mathbf{v}_1 = (1, 2)^{\mathsf{T}}$, а для $\lambda = -1$ — $\mathbf{v}_2 = (1, -2)^{\mathsf{T}}$. Получаем то же решение, что и исключением. Два метода описывают одну структуру: собственные векторы задают направления, в которых компоненты изменяются с общим экспоненциальным множителем.

Фундаментальная матрица

Столбцы из n независимых решений однородной системы образуют фундаментальную матрицу $X(t)$. Она удовлетворяет $X' = AX$ и имеет ненулевой определитель. Общее решение записывается компактно: $\mathbf{y} = X\mathbf{c}$.

Для разбора A можно взять

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \det X(t) = -4e^{2t} \neq 0.$$

Если коэффициенты зависят от времени, формула Лиувилля имеет вид $\det X(t) = \det X(t_0)\exp(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds)$. Здесь след матрицы равен 2, что объясняет множитель e^{2t}.

Для постоянной матрицы нормированная фундаментальная матрица задаётся матричной экспонентой:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots, \qquad \mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0.$$

Матричные степени вычисляются обычным умножением матриц. Нельзя заменять e^{At} матрицей экспонент её отдельных элементов: такая операция имеет другой смысл и обычно не решает систему.

Вращение и кратные собственные значения

Для $A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$, $\omega > 0$, выполняется $A^2 = -\omega^2 I$. Разделив ряд экспоненты на чётные и нечётные степени, получаем

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Это вращение: величина $x^2 + y^2$ сохраняется. Прямая проверка даёт $(x^2+y^2)' = 2x(-\omega y) + 2y(\omega x) = 0$. Комплексные собственные значения $\pm i\omega$ здесь соответствуют действительным круговым траекториям.

У матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ единственное собственное значение 1 кратности 2, но лишь одно собственное направление. Запись $A = I + N$, $N^2 = 0$, позволяет получить

$$e^{At} = e^t(I + tN) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $y_1 = e^t(C_1 + tC_2)$, $y_2 = C_2 e^t$. Множитель t играет ту же роль, что и при кратном характеристическом корне скалярного уравнения. Одного собственного вектора недостаточно для записи полного двухпараметрического решения.

Неоднородная система и вариация постоянных

В системе $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ подставим $\mathbf{y} = X(t)\mathbf{c}(t)$, где X — фундаментальная матрица однородной системы. После сокращения $X'\mathbf{c} = AX\mathbf{c}$ остаётся $X\mathbf{c}' = \mathbf{b}$. Поэтому

$$\mathbf{y}(t) = X(t)\left[X(t_0)^{-1}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} X(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds\right].$$

Порядок множителей существенен: матрицы в общем случае не коммутируют. Для постоянной A формула приобретает вид

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\mathbf{b}(s)\,ds.$$

Первое слагаемое передаёт начальное состояние, второе суммирует вклад внешнего воздействия за всё прошедшее время.

Разбор B. Последовательное решение треугольной системы

Пусть $x' = -x + 1$, $y' = -2y + x$, $x(0) = y(0) = 0$. Первая строка решается независимо и даёт $x = 1 - e^{-t}$. Во второй строке получаем $y' + 2y = 1 - e^{-t}$. С множителем e^{2t} имеем

$$(e^{2t}y)' = e^{2t} - e^{t}, \qquad y = \frac{1}{2} - e^{-t} + Ce^{-2t}.$$

Условие $y(0) = 0$ даёт $C = 1/2$. Проверяем: $y' = e^{-t} - e^{-2t}$, а $-2y + x = e^{-t} - e^{-2t}$. При $t \to +\infty$ решение стремится к равновесию $(1, 1/2)$, которое также находится из системы $-x + 1 = 0$, $-2y + x = 0$.

Как читать поведение системы

В линейной системе с постоянной матрицей отрицательные действительные части всех собственных значений означают затухание любого однородного решения при $t \to +\infty$. Положительная действительная часть хотя бы одного значения даёт растущее направление и неустойчивость нулевого равновесия. При нулевых действительных частях необходима дополнительная проверка кратностей и структуры матрицы: вращение ограничено, а нетривиальный жорданов блок может вызвать рост.

В разборе A направление $(1, 2)$ растёт как e^{3t}, а $(1, -2)$ затухает как e^{-t}. Затухание вдоль одного направления не обеспечивает устойчивость: соседние данные могут содержать растущую компоненту.

Задания для самостоятельного разбора

1. Запишите $y'' + 4y = \sin t$ как систему первого порядка.
2. Решите $x' = 2x$, $y' = -y$ при $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.
3. Для $x' = y$, $y' = -x$ найдите решение с начальными данными $(1, 0)$ и проверьте сохранение $x^2 + y^2$.
4. Вычислите e^{At} для $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и исследуйте предел при $t \to +\infty$.
5. Решите $x' = -x + 2$, $y' = -3y + x$ при нулевых начальных условиях и найдите предельное состояние.