ЛЕКЦИЯ 3

Экстремумы в задачах с ограничениями

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Кандидатов на экстремум недостаточно найти: их нужно классифицировать и проверить границу допустимой области. Ограничения меняют набор разрешённых направлений изменения.

Цели обучения

- Исследовать стационарные точки по вторым производным.
- Применять метод множителей Лагранжа.
- Находить наибольшее и наименьшее значения на замкнутой области.

Локальное сравнение значений

Точка P является локальным минимумом, если в некоторой её окрестности $f(Q) \geq f(P)$ для всех допустимых Q. Для максимума знак меняется. Слово «допустимых» особенно важно при ограничениях: движение за пределы области не участвует в сравнении.

Во внутренней точке экстремума дифференцируемой функции градиент равен нулю. Действительно, ограничения функции на координатные прямые имеют одномерные экстремумы. Поэтому поиск кандидатов начинается с системы $f_x = 0$, $f_y = 0$. Дополнительно рассматривают точки недифференцируемости и границу области.

Квадратичная часть приращения

Вблизи стационарной точки для функции с непрерывными вторыми производными имеем

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(h^2 + k^2),$$

где $A = f_{xx}$, $B = f_{xy}$, $C = f_{yy}$ вычислены в (a, b). Матрица этих коэффициентов называется матрицей Гессе. Квадратичная форма определяет знак главного приращения.

Критерий для двух переменных

Пусть $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

- $\Delta > 0$, $A > 0$: строгий локальный минимум;
- $\Delta > 0$, $A < 0$: строгий локальный максимум;
- $\Delta < 0$: седловая точка, экстремума нет;
- $\Delta = 0$: критерий не решает задачу.

Стационарность и непрерывность вторых производных в окрестности входят в условия этого признака.

Разбор A. Квадратичная модель затрат

Пусть $f = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$. Система

$$2x + y = 4, \qquad x + 2y = 2$$

даёт $(x, y) = (2, 0)$. Здесь $A = C = 2$, $B = 1$, $\Delta = 3 > 0$, значит, найден минимум со значением -4. Более того,

$$f(x, y) + 4 = (x - 2)^2 + (x - 2)y + y^2 = \left(x - 2 + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2.$$

Правая часть неотрицательна на всей плоскости и равна нулю только в $(2, 0)$. Поэтому минимум является единственным глобальным. Сам локальный критерий без этого дополнительного рассуждения утверждал бы меньше.

Седло и вырожденные точки

У $f = x^2 - y^2$ начало координат стационарно, но по оси x функция возрастает от нуля, а по оси y убывает. Гессиан имеет определитель -4, что подтверждает седловой характер.

Если определитель равен нулю, нужны другие средства. Функции $x^4 + y^4$, $-(x^4 + y^4)$ и $x^4 - y^4$ имеют в начале одинаковую нулевую матрицу Гессе. Первая имеет строгий минимум, вторая максимум, третья седло. Следовательно, нулевой определитель не означает ни отсутствие экстремума, ни его наличие.

Можно анализировать точное приращение, члены более высокого порядка или подходящие кривые. Найденные два пути с противоположными знаками приращения достаточны для опровержения экстремума. Для доказательства минимума требуется контроль всех близких допустимых точек.

Ограничение меняет задачу

Пусть требуется исследовать $f(x, y)$ при условии $g(x, y) = 0$. Разрешённые точки лежат на кривой. В регулярной точке $\nabla g \neq 0$ градиент f при условном экстремуме ортогонален касательной, поэтому параллелен ∇g:

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \qquad g = 0.$$

Это метод множителей Лагранжа. Он даёт кандидатов, которые затем сравнивают или классифицируют. Если $\nabla g = 0$, такую точку проверяют отдельно: регулярный вывод к ней неприменим.

Разбор B. Минимум при линейном балансе

Найдём минимум $f = x^2 + y^2$ при $x + 2y = 5$. Уравнения Лагранжа:

$$2x = \lambda, \qquad 2y = 2\lambda, \qquad x + 2y = 5.$$

Получаем $\lambda = 2$, $x = 1$, $y = 2$, $f = 5$. Проверим результат исключением $x = 5 - 2y$:

$$f = (5 - 2y)^2 + y^2 = 5(y - 2)^2 + 5.$$

Минимум глобальный, а максимума на неограниченной прямой нет. Этот пример показывает, что нахождение единственного кандидата не означает существования обоих видов экстремума.

Разбор C. Два экстремума на окружности

Для $f = xy$ при $x^2 + y^2 = 1$ система имеет вид

$$y = 2\lambda x, \qquad x = 2\lambda y, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Ни одна координата решения не равна нулю, поэтому $4\lambda^2 = 1$. При $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$ получаем максимум $1/2$, при $x = -y = \pm 1/\sqrt{2}$ — минимум $-1/2$. Оценка $2|xy| \le x^2 + y^2 = 1$ подтверждает глобальность и точность этих границ.

Наибольшее и наименьшее на замкнутой области

Непрерывная функция на непустом компактном множестве достигает обоих предельных значений. В плоскости достаточно замкнутости и ограниченности множества. Это теорема существования, но она не сообщает координаты нужных точек.

Практическая схема состоит из трёх шагов: найти внутренние критические точки; исследовать каждую гладкую часть границы; отдельно проверить углы и другие особые точки границы. После этого сравнивают все найденные значения. Если граница кусочная, один множитель Лагранжа не заменяет анализ каждого её участка.

Разбор D. Функция на прямоугольнике

Пусть $f = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ на $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$. Представление

$$f = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 5$$

сразу даёт внутренний минимум -5 в $(1, 2)$. Для максимума максимизируем два квадрата независимо: на данном отрезке $|x - 1| \le 2$, $|y - 2| \le 2$. Равенства достигаются одновременно при $(3, 0)$, поэтому максимум равен $4 + 4 - 5 = 3$.

При обычном исследовании границы получились бы четыре одномерные квадратичные функции и четыре угла. Здесь специальная структура позволила заменить эти вычисления точной оценкой. Выбор короткого способа должен сопровождаться объяснением, почему он охватывает всю область.

Разбор E. Почему стационарной точки может не быть

Найдём крайние значения $f = xy$ в треугольнике $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$. Внутри области обе координаты положительны, а градиент (y, x) не равен нулю, поэтому внутренних стационарных точек нет. На координатных сторонах значение равно нулю. На наклонной стороне $y = 2 - x$ функция превращается в

$$f(x, 2 - x) = x(2 - x) = 1 - (x - 1)^2, \qquad 0 \leq x \leq 2.$$

Максимум равен 1 и достигается в $(1, 1)$. Минимум равен 0 на двух координатных сторонах, включая вершины. Таким образом, оба крайних значения существуют благодаря компактности области, хотя у функции нет стационарных точек в её внутренности.

Граница проверяется как самостоятельная часть задачи. Нельзя ограничиваться только системой $f_x = f_y = 0$ и нельзя считать, что каждое крайнее значение достигается в единственной точке. Здесь множество минимумов состоит из целых отрезков.

Задания для самостоятельного разбора

1. Найдите и классифицируйте стационарные точки $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x$.
2. Исследуйте начало координат для $x^4 + y^6$ и для $x^4 - y^6$.
3. Найдите экстремумы $x + 2y$ на окружности $x^2 + y^2 = 5$.
4. Найдите крайние значения xy в треугольнике $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 4$.
5. Объясните, какие дополнительные точки нужно проверить, если граница имеет углы.