ЛЕКЦИЯ 2

Градиент, сложные зависимости и касательная плоскость

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Градиент собирает частные производные в вектор, задающий направление наибольшего роста. Цепное правило и неявное дифференцирование позволяют применять эту модель к поверхностям и траекториям.

Цели обучения

- Дифференцировать композиции нескольких переменных.
- Находить производную по направлению и градиент.
- Строить касательную плоскость и нормаль к поверхности.

Цепное правило для нескольких входов

Если $z = f(u, v)$, а обе промежуточные величины зависят от t, изменение z получает два вклада:

$$\frac{dz}{dt} = f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt}.$$

Частные производные f вычисляются в точке $(u(t), v(t))$. Для $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ правило применяется отдельно к каждому независимому аргументу:

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x, \qquad z_y = f_u u_y + f_v v_y.$$

Достаточно дифференцируемости соответствующих отображений. В отличие от функции одного аргумента, здесь суммируются разные пути зависимости конечной величины от выбранного входа.

Разбор A. Два промежуточных канала

Пусть $z = u^2 v$, $u = x + y$, $v = xy$. Тогда $f_u = 2uv$, $f_v = u^2$, поэтому

$$z_x = 2(x + y)xy + (x + y)^2 y = y(x + y)(3x + y).$$

При $(x, y) = (1, 2)$ получаем $z_x = 30$. Проверка прямой подстановкой $z = xy(x + y)^2$ и правилом произведения даёт тот же результат. Такой контроль полезен, когда легко пропустить один канал зависимости.

Если $z = x^2 y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, то

$$\frac{dz}{dt} = 2xy(-\sin t) + x^2 \cos t = \cos t(1 - 3\sin^2 t).$$

Величина dz/dt описывает изменение вдоль конкретной траектории и не совпадает в общем случае ни с z_x, ни с z_y.

Производная по выбранному направлению

Пусть $e = (e_1, e_2)$ — единичный вектор. Для дифференцируемой функции

$$D_e f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_1, b + te_2) - f(a,b)}{t} = f_x(a,b)e_1 + f_y(a,b)e_2.$$

Если дан ненулевой вектор v, сначала используют $e = v/|v|$. Без нормировки производная по параметру пути $a + tv$ зависит ещё и от скорости прохождения пути. Геометрическая производная по направлению относится к единичному перемещению.

Градиент и наибольший рост

$$\nabla f = (f_x, f_y), \qquad D_e f = \nabla f \cdot e.$$

Из неравенства Коши следует $|D_e f| \le |\nabla f|$. При ненулевом градиенте наибольший рост происходит вдоль ∇f, наибольшее убывание — в противоположную сторону. Если градиент нулевой, все первые направленные производные равны нулю, но поведение высших порядков ещё нужно исследовать.

Разбор B. Направление роста и направление движения

Для $f = x^2 + xy + 2y^2$ в точке $(1, -1)$

$$\nabla f = (2x + y, x + 4y) = (1, -3).$$

Направлению $v = (3, 4)$ соответствует $e = (3/5, 4/5)$, поэтому $D_e f = (3 - 12)/5 = -9/5$. В этом направлении функция убывает. Максимальная производная равна $\sqrt{10}$ и достигается вдоль $(1, -3)/\sqrt{10}$.

Если $r(t)$ движется по линии уровня $f(r(t)) = c$, то дифференцирование даёт $\nabla f \cdot r'(t) = 0$. Следовательно, ненулевой градиент перпендикулярен касательному направлению линии уровня. Для поверхности уровня в пространстве рассуждение аналогично.

Неявная зависимость

Равенство $F(x, y) = 0$ может задавать y как функцию x. Если F непрерывно дифференцируема около точки, $F = 0$ в самой точке и $F_y \neq 0$, то локально существует единственная дифференцируемая ветвь $y(x)$ и

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Для поверхности $F(x,y,z)=0$ при $F_z \neq 0$ получаем локальное представление $z = z(x,y)$:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Ненулевой знаменатель является условием применимости, а не технической мелочью. Если он равен нулю, поверхность иногда можно выразить через другую координату; если весь градиент нулевой, регулярность точки требует отдельного анализа.

Разбор C. Сфера как локальный график

Пусть $F = x^2+y^2+z^2-9$ и $P=(1,2,2)$. В точке P имеем $F_z = 4 \neq 0$, так что верхняя ветвь сферы локально является графиком. Частные производные равны $z_x = -1/2$, $z_y = -1$. Их знаки показывают, что при увеличении положительных x или y высота верхней полусферы уменьшается.

Касательная плоскость и нормальная прямая

Для графика $z = f(x,y)$ в точке $(a,b,f(a,b))$ касательная плоскость имеет уравнение

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Это геометрическая форма полного дифференциала. Нормальный вектор можно взять равным $(-f_x,-f_y,1)$. Для регулярной поверхности уровня $F=0$ нормалью является $\nabla F(P)$, поэтому

$$\nabla F(P)\cdot(r-P)=0, \qquad r = P + t\nabla F(P)$$

задают соответственно касательную плоскость и нормальную прямую. Умножение нормали на ненулевое число не меняет эти геометрические объекты.

Для сферы из разбора C нормаль пропорциональна $(1,2,2)$, откуда

$$x+2y+2z=9, \qquad r=(1,2,2)+t(1,2,2).$$

Из формулы графика получается то же уравнение: $z-2 = -(x-1)/2-(y-2)$. Совпадение двух способов служит проверкой знаков.

Разбор D. Касательная к параболоиду

Для $z=x^2+2y^2$ в точке $(1,1,3)$ получаем $f_x=2$, $f_y=4$. Следовательно,

$$z = 2x+4y-3, \qquad r=(1,1,3)+t(-2,-4,1).$$

Разность между поверхностью и касательной плоскостью равна $(x-1)^2+2(y-1)^2 \geq 0$. Значит, в этом примере весь параболоид лежит над касательной. Для произвольной поверхности такое свойство не гарантируется одной лишь дифференцируемостью.

Как проверять геометрический ответ

Касательная плоскость должна проходить через исходную точку. Её нормаль должна быть ортогональна двум независимым касательным направлениям поверхности. Для графика такими направлениями служат $(1,0,f_x)$ и $(0,1,f_y)$; скалярное произведение каждого с $(-f_x,-f_y,1)$ равно нулю.

При вычислении производной вдоль пути следует различать единичное направление и вектор скорости. Формула $df(r(t))/dt = \nabla f \cdot r'(t)$ включает фактическую скорость движения; нормировать $r'(t)$ в ней не нужно.

Разбор E. Изменение вдоль заданной траектории

Пусть поле величины задаётся $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, а точка движется по эллипсу $r(t) = (2\cos t, \sin t)$. Производная вдоль движения равна

$$\frac{d}{dt} f(r(t)) = (2x, 4y) \cdot (-2\sin t, \cos t) = -4\sin t \cos t.$$

Прямая подстановка даёт $f(r(t)) = 4\cos^2 t + 2\sin^2 t$ и тот же результат. При $t = \pi/4$ скорость изменения равна -2. В этой точке $|r'(t)| = \sqrt{5/2}$, поэтому производная по единичному направлению движения равна $-2/\sqrt{5/2}$: она измеряет изменение на единицу пройденного пути, а не на единицу времени.

Этот пример связывает градиент с кинематикой. Даже если направление движения известно, для скорости изменения по времени нужен ещё модуль скорости. Если траектория лежит на линии уровня, скалярное произведение градиента и скорости равно нулю в каждой регулярной точке.

Задания для самостоятельного разбора

1. Для $z = e^{uv}$, $u = x - y$, $v = x + y$ найдите z_x, z_y двумя способами.
2. Найдите наибольшую скорость роста $x^2 + 3y^2$ в точке $(1, 2)$.
3. Вычислите производную xyz в $(1, 2, 3)$ по направлению $(2, -1, 2)$.
4. Постройте касательную плоскость к $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$ в точке $(2, 1, 1)$.
5. Объясните, почему в точке $(0, 0, 0)$ у конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ нельзя применить формулу с ненулевым градиентом.