ЛЕКЦИЯ 5

Интегрирование по объёму и интегралы с параметром

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Тройной интеграл описывает распределение величины в пространстве. Если сама модель зависит от параметра, изменение интеграла можно исследовать через изменение функции и границ.

Цели обучения

- Задавать пространственные области и вычислять тройные интегралы.
- Использовать цилиндрические и сферические координаты.
- Находить массу, центр тяжести и производную интеграла по параметру.

Тройной интеграл и пространственная область

Тройной интеграл определяется пределом сумм $\sum f(P_i)\Delta V_i$ по малым частям объёма. Для непрерывной функции на ограниченном теле с достаточно регулярной границей он существует. Его вычисление обычно сводится к трём последовательным интегралам, но сначала нужно описать геометрию тела.

Если D — проекция тела на плоскость xy, а высота меняется от $z_1(x,y)$ до $z_2(x,y)$, то

$$\iiint_{\Omega} f\,dV = \iint_{D}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dA.$$

Внутренняя переменная меняется при фиксированных внешних. Шесть возможных порядков интегрирования описывают одно тело лишь тогда, когда границы переписаны правильно.

Разбор A. Тетраэдр в первом октанте

Пусть $x,y,z\ge 0$, $x+y+z\le 1$. Тогда

$$V=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}\,dx=\frac{1}{6}.$$

Интеграл координаты z равен

$$\iiint_{\Omega} z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\,dx = \frac{1}{24}.$$

Для однородного тела $\bar{z} = (1/24)/(1/6) = 1/4$. Симметрия относительно перестановки координат даёт $\bar{x} = \bar{y} = 1/4$. Центр тяжести находится внутри тела, что служит геометрической проверкой.

Замена координат в пространстве

В трёх измерениях элемент объёма умножается на модуль определителя матрицы производных замены. В цилиндрических координатах

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \qquad dV = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Эта запись удобна при вращательной симметрии вокруг оси Oz. Ограничения на z могут зависеть от r и θ, поэтому цилиндрические координаты не обязательно означают цилиндрическую форму тела.

Разбор B. Момент инерции цилиндра

Для цилиндра $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le 3$ с единичной плотностью объём и масса равны 12π. Момент инерции относительно Oz:

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dV = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\,dr\,d\theta\,dz = 24\pi.$$

Чем дальше элемент массы от оси, тем больше его вклад; именно поэтому расстояние до оси возводится в квадрат.

В сферических координатах используем $r \ge 0$, полярный угол $0 \le \varphi \le \pi$ и азимут $0 \le \theta < 2\pi$:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi, \qquad dV = r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Обозначения углов в разных источниках различаются, поэтому их смысл нужно задавать явно. Для шара радиуса R

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Масса, центр тяжести и инерция

При объёмной плотности $\rho \ge 0$ вводятся

$$m = \iiint_{\Omega} \rho\,dV, \qquad (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{1}{m}\iiint_{\Omega} (x,y,z)\rho\,dV,$$

где последняя запись означает три отдельных интеграла и требует $m > 0$. Для оси Oz момент равен $\iiint (x^2+y^2)\rho\,dV$; для других координатных осей используются суммы квадратов двух поперечных координат.

Для однородного шара центр расположен в начале координат по симметрии. При единичной плотности

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \sin^3\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

Здесь $x^2+y^2 = r^2\sin^2\varphi$, а оставшиеся множители приходят из якобиана. Учитывая массу, получаем $I_z = 2mR^2/5$.

Интеграл как функция параметра

Пусть $I(a) = \int_\alpha^\beta f(x,a)\,dx$. Переменная x интегрируется, а параметр a остаётся аргументом результата. Если f и f_a непрерывны на прямоугольнике по (x,a), то

$$I'(a) = \int_\alpha^\beta f_a(x,a)\,dx.$$

Непрерывность обеспечивает равномерный контроль разностного отношения. Для несобственных интегралов или разрывных зависимостей нужны дополнительные условия; перенос производной под знак интеграла без проверки может оказаться неверным.

Разбор C. Экспонента с параметром

Рассмотрим $I(a) = \int_0^1 e^{ax}\,dx$. При $a \neq 0$ имеем $I(a) = (e^a-1)/a$, а при $a=0$ непосредственно $I(0)=1$. Производная в нуле проще находится под знаком интеграла:

$$I'(0) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Полученная формула также показывает, что видимая особенность дроби при $a=0$ устранима. Параметрическая запись часто удобнее явного ответа.

Подвижные границы и интегрирование по параметру

При дифференцируемых границах и достаточной непрерывности действует правило Лейбница:

$$\frac{d}{da}\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f(x,a)\,dx = f(\beta(a),a)\beta'(a) - f(\alpha(a),a)\alpha'(a) + \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f_a(x,a)\,dx.$$

Первые два слагаемых описывают изменение самого промежутка, последнее — изменение функции внутри него. Например, при $a>0$

$$J(a) = \int_0^a (x+a)\,dx = \frac{3}{2}a^2, \qquad J'(a) = 2a + \int_0^a 1\,dx = 3a.$$

Если забыть вклад верхней границы, останется только треть правильного результата.

Для непрерывной функции на прямоугольнике можно поменять порядок интегрирования по аргументу и параметру:

$$\int_c^d \left(\int_\alpha^\beta f(x,a)\,dx\right) da = \int_\alpha^\beta \left(\int_c^d f(x,a)\,da\right) dx.$$

Так параметрический интеграл становится двойным интегралом. Этот переход следует из общей теоремы о повторном интегрировании, а не из формальной перестановки знаков.

Задания для самостоятельного разбора

1. Найдите объём тела $x, y, z \geq 0$, $x + 2y + z \leq 2$.
2. Вычислите $\iiint z\, dV$ по цилиндру $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$.
3. Запишите сферические границы для верхней половины шара радиуса 3.
4. Найдите производную $\int_0^1 \ln(1 + ax)\, dx$ при $a > -1$.
5. Примените правило Лейбница к $\int_a^{2a} x^2\, dx$ и проверьте результат прямым вычислением.