ЛЕКЦИЯ 1

Функции нескольких переменных: область, предел, дифференциал

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

В многомерной задаче к точке можно приближаться по разным путям. Частные изменения описываются производными по координатам, а полное изменение связывает все направления в одной линейной модели.

Цели обучения

- Определять область функции и строить линии уровня.
- Различать предел, непрерывность и частные производные.
- Вычислять полный дифференциал и оценивать малые изменения.

Несколько аргументов и одна величина

Температура на пластине зависит от двух координат, а плотность тела — от трёх. Запись $z = f(x, y)$ означает, что каждой допустимой паре (x, y) сопоставлено одно число. Область определения теперь является множеством точек плоскости, а график — поверхностью в пространстве. Параметры нельзя проверять по отдельности, если ограничение связывает их между собой.

Разбор A. Пересечение ограничений

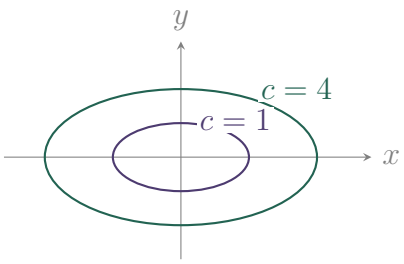
Для $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \ln(y - x)$ должны одновременно выполняться

$$x^2 + y^2 \le 9, \qquad y > x.$$

Получаем часть диска радиуса 3, лежащую над прямой $y = x$. Дуга окружности включается там, где выполнено второе условие; сама прямая исключается из-за логарифма. Область ограниченна, но не замкнута. Подстановка точки на границе требует проверки каждого ограничения.

Линии и поверхности уровня

Линия уровня $f(x,y)=c$ объединяет точки с одинаковым значением функции. Она позволяет представить поверхность без пространственного рисунка. Например, для $f=x^2+4y^2$ положительным уровням соответствуют эллипсы; нулевой уровень состоит из начала координат, отрицательных уровней нет.



Для функции трёх переменных $F(x,y,z)$ равенство $F=c$ обычно задаёт поверхность уровня. Так, $x^2+y^2+z^2=c>0$ описывает сферу радиуса $\sqrt{c}$. Слово «обычно» существенно: отдельный уровень может вырождаться в точку или вообще отсутствовать.

Предел должен учитывать все пути

Предел $f(x,y)\to L$ при $(x,y)\to(a,b)$ означает, что для всякого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$, такое что

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

для всех точек области определения. Приближение допускается по прямым, параболам и любым другим путям. Разные пределы вдоль двух путей опровергают общий предел, но совпадение на нескольких путях ещё не доказывает его.

Разбор B. Почему проверки осей недостаточно

Пусть $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ вне начала координат. На обеих осях функция равна нулю, тогда как на прямой $y=x$ равна $1/2$. Поэтому предела в начале координат нет. Даже если определить $f(0,0)=0$, непрерывность не появится.

Для $g(x,y)=x^2y/(x^2+y^2)$ ситуация другая:

$$|g(x,y)|\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow 0.$$

Оценка действует сразу во всех направлениях, поэтому доказывает предел. Определив $g(0,0)=0$, получаем непрерывную функцию. Непрерывность в точке означает совпадение её значения с пределом.

Частные производные

При вычислении f_x переменную y фиксируют, а при вычислении f_y фиксируют x:

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},\qquad f_y(a,b)=\lim_{k\to0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

Эти пределы описывают изменения вдоль координатных направлений. Их существование само по себе не обеспечивает непрерывности: функция из разбора B с нулевым

значением в начале имеет там обе частные производные, равные нулю, но остаётся разрывной.

Разбор C. Дифференцирование по координатам

Для $f(x,y) = x^2 y + \sin y$ имеем

$$f_x = 2xy, \qquad f_y = x^2 + \cos y.$$

При дифференцировании по x величина $\sin y$ постоянна; при дифференцировании по y коэффициент x^2 сохраняется. Вторые производные равны

$$f_{xx} = 2y, \quad f_{xy} = 2x, \quad f_{yx} = 2x, \quad f_{yy} = -\sin y.$$

Непрерывность смешанных производных в окрестности гарантирует их равенство. Без соответствующих условий перестановка порядка дифференцирования требует отдельного обоснования.

Полное изменение и дифференцируемость

Линейное приближение

Функция дифференцируема в (a,b), если при $r = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ её приращение представляется в виде

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + o(r).$$

Тогда $A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$, а полный дифференциал равен

$$df = f_x(a,b)\,dx + f_y(a,b)\,dy.$$

Остаток мал по сравнению с расстоянием до исходной точки во всех направлениях одновременно.

Непрерывность частных производных в окрестности точки является достаточным условием дифференцируемости. Дифференцируемость, в свою очередь, влечёт непрерывность. Полное приращение и дифференциал различаются остатком; равенство между ними точно только для аффинных функций.

Для функции разбора C в точке $(1,0)$ получаем $f = 0$, $f_x = 0$, $f_y = 2$. Поэтому $f(1{,}02, 0{,}01) \approx 0 + 0 \cdot 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$. Точное значение равно $1{,}02^2 \cdot 0{,}01 + \sin 0{,}01 \approx 0{,}0204038$. Отсутствие линейного вклада по x не означает, что функция совсем от него не зависит: влияние проявляется в более высоких порядках.

Если погрешности аргументов ограничены числами η_x, η_y, линейная оценка абсолютной погрешности имеет вид $|\Delta f| \approx |f_x|\eta_x + |f_y|\eta_y$. Это приближённая оценка; строгая граница дополнительно учитывает остаток или ограничивает производные на всём рассматриваемом участке.

Как получить строгую оценку остатка

Пусть вторые производные непрерывны на отрезке от (a,b) до $(a+h,b+k)$ и каждая по модулю не превосходит M. Применяя одномерную формулу Тейлора к $\varphi(t)=f(a+th,b+tk)$, получаем

$$|f(a+h,b+k)-f(a,b)-df|\le \frac{M}{2}\bigl(|h|+|k|\bigr)^2.$$

Здесь $\varphi''=f_{xx}h^2+2f_{xy}hk+f_{yy}k^2$, поэтому оценка учитывает также совместное изменение переменных. Она превращает линейное приближение в интервал, гарантированно содержащий точное значение.

В разборе C вдоль отрезка к $(1{,}02,0{,}01)$ можно взять $M=2{,}04$: на нём $|2y|\le 0{,}02$, $|2x|\le 2{,}04$, $|\sin y|\le 0{,}01$. Поэтому ошибка приближения $0{,}02$ не превышает $1{,}02\cdot 0{,}03^2=0{,}000918$. Фактическая ошибка около $0{,}000404$ укладывается в эту границу. Оценка не обязана быть самой точной; её достоинство в том, что она доказана заранее по производным.

Задания для самостоятельного разбора

1. Найдите область определения $\ln(4-x^2-y^2)/\sqrt{y+1}$.
2. Опишите уровни $x^2+y^2-z^2=c$ при $c=0$ и при $c>0$.
3. Исследуйте предел $xy^2/(x^2+y^2)$ в начале координат через оценку.
4. Вычислите все частные производные второго порядка xe^{xy}.
5. Линеаризуйте $\sqrt{x^2+y^2}$ около точки $(3,4)$ и оцените значение в $(3{,}02,3{,}99)$.