ЛЕКЦИЯ 7

Поток и циркуляция: элементы теории поля

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Дивергенция измеряет локальный баланс потока, а ротор — локальную циркуляцию. Теоремы Остроградского и Стокса связывают эти характеристики с интегралами по границе.

Цели обучения

- Вычислять дивергенцию и ротор векторного поля.
- Задавать ориентацию и находить поток через поверхность.
- Выбирать между прямым вычислением и интегральными теоремами.

Скалярное поле и векторное поле

Скалярное поле сопоставляет точке число, например температуру $T(x, y, z)$. Векторное поле сопоставляет вектор $F = (P, Q, R)$, например скорость потока. Для скалярного поля производные собираются в градиент. Для векторного поля важны два других объекта: скалярная дивергенция и векторный ротор.

Предполагаем, что компоненты поля имеют непрерывные первые производные в рассматриваемой области. При применении интегральных теорем поле должно быть определено не только на границе, но и во всём объёме или на всей поверхности, где используется соответствующая производная.

Дивергенция и локальный баланс

$$\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z.$$

Дивергенция характеризует разность исходящего и входящего потока на единицу малого объёма. Положительное значение соответствует локальному избытку исходящего потока, отрицательное — входящего. Нулевая дивергенция не означает нулевого поля: постоянное ненулевое поле имеет нулевой баланс внутри любого малого объёма.

Например, для $F = (x, y, z)$ дивергенция равна 3. Для $G = (-y, x, 0)$ она равна нулю: поле вращательное, но не создаёт локального прироста объёма потока. Эти примеры отделяют расширение от вращения.

Ротор и локальная циркуляция

Ротор определяется формулой

$$\operatorname{rot} F = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y).$$

Его проекция на нормаль маленькой площадки описывает циркуляцию по её границе на единицу площади. Для $G = (-y, x, 0)$ получаем $\operatorname{rot} G = (0, 0, 2)$: ось вращения направлена вдоль Oz.

При достаточной гладкости выполняются тождества $\operatorname{rot}(\nabla\Phi) = 0$ и $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$. Они следуют из равенства смешанных производных. Обратные утверждения о глобальном потенциале требуют условий на область; одно только тождество производных не устраняет топологические препятствия.

Разбор A. Проверка двух характеристик

Для $F = (x^2, y^2, z^2)$ имеем $\operatorname{div} F = 2x+2y+2z$, а ротор равен нулю. Потенциалом служит $\Phi = (x^3 + y^3 + z^3)/3$. Поле потенциально, но обычно не имеет нулевой дивергенции. Следовательно, понятия «потенциальное» и «без источников» не взаимозаменяемы.

Поток через ориентированную поверхность

Пусть поверхность S снабжена единичной нормалью n. Поток поля равен

$$\iint_S F \cdot n \, dS.$$

Скалярное произведение выделяет поперечную составляющую; касательная составляющая не переносит величину через поверхность. Смена нормали меняет знак потока. Для замкнутой поверхности обычно выбирают внешнюю нормаль.

Если $r = r(u, v)$ — регулярная параметризация, то ориентированный элемент площади равен $(r_u \times r_v)\, du\, dv$, если этот вектор согласован с выбранной нормалью. Поэтому

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v)\, du\, dv.$$

Нормировать векторное произведение здесь не нужно: его длина уже учитывает увеличение площади. Для графика $z = f(x, y)$ с верхней ориентацией вектор площади равен $(-f_x, -f_y, 1)dx\, dy$.

Разбор B. Поток через наклонную грань

Пусть $z = 1 - x - y$ над треугольником $x, y \ge 0$, $x + y \le 1$, нормаль направлена вверх, а $F = (0, 0, z)$. Тогда

$$F \cdot (-f_x, -f_y, 1) = 1 - x - y,$$

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx = \frac{1}{6}.$$

Множитель $\sqrt{3}$ отдельно не появляется: он уже включён вместе с нормалью в ориентированный вектор площади $(1, 1, 1)$.

Теорема Остроградского–Гаусса

Для ограниченного тела Ω с кусочно-гладкой замкнутой границей и поля класса C^1 в окрестности замыкания

Баланс объёма и границы

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot n \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dV,$$

где n — внешняя нормаль. Внутренние потоки между соседними частями тела сокращаются, оставляя поток через внешнюю границу.

Для радиального поля $F = (x, y, z)$ и шара радиуса R правая часть равна $3 \cdot 4\pi R^3/3 = 4\pi R^3$. На сфере $F = Rn$, поэтому прямое вычисление даёт $R \cdot 4\pi R^2$ — тот же ответ.

Для цилиндра радиуса a, высоты h и поля $F = (x, y, 2z)$ дивергенция равна 4, значит, поток равен $4\pi a^2 h$. Прямая проверка: боковая поверхность даёт $2\pi a^2 h$, верхняя крышка — $2\pi a^2 h$, нижняя — ноль. Пропуск одной части замкнутой границы нарушил бы равенство.

Разбор B можно проверить тем же способом: добавим к наклонной грани три координатные грани тетраэдра. На них поток поля $(0, 0, z)$ нулевой. Дивергенция равна 1, поэтому поток через наклонную грань равен объёму тетраэдра $1/6$.

Теорема Стокса

Для гладкой ориентированной поверхности S с кусочно-гладкой границей и поля класса C^1 в её окрестности

$$\oint_{\partial S} F \cdot dr = \iint_{S} (\operatorname{rot} F) \cdot n \, dS.$$

Ориентация контура согласуется с нормалью правилом правой руки: при взгляде со стороны положительной нормали граница плоского диска обходится против часовой стрелки. В отличие от формулы Гаусса, здесь поверхность может быть незамкнутой, а слева интеграл по её граничной кривой.

Разбор C. Циркуляция по окружности

Для $F = (-y/2, x/2, 0)$ имеем $\operatorname{rot} F = (0, 0, 1)$. Выберем диск $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = 0$, с верхней нормалью. Тогда циркуляция равна площади диска πa^2. Параметризация окружности даёт непосредственно $F \cdot r' = a^2/2$, и интегрирование по $0 \le t \le 2\pi$ подтверждает результат.

Выбор другой поверхности с той же границей может упростить вычисление, если поле остаётся гладким на нужных поверхностях и ориентация согласована. Теорема не разрешает проводить поверхность через особенность поля.

Разбор D. Нулевая дивергенция и особая точка

Для поля $F = (x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ вне начала координат прямое дифференцирование даёт $\operatorname{div} F = 0$. Однако на сфере радиуса R поле равно n/R^2, поэтому поток через внешнюю нормаль равен

$$\iint_{S_R} F \cdot n \, dS = \frac{1}{R^2} \, 4\pi R^2 = 4\pi.$$

Противоречия с теоремой Гаусса нет: поле не определено в центре шара, так что условие гладкости внутри тела нарушено. Если вместо шара взять сферический слой $a \le r \le R$, то теорема применима. На внутренней сфере внешняя относительно слоя нормаль направлена к центру. Её поток равен -4π, и суммарный поток $4\pi - 4\pi = 0$ совпадает с интегралом дивергенции.

Таким образом, перед применением интегральной теоремы проверяют не только производные на границе, но и всю область между поверхностями. У внутренней границы слово «внешняя» относится к рассматриваемому телу, а не к направлению от начала координат.

Задания для самостоятельного разбора

1. Найдите дивергенцию и ротор $F = (yz, xz, xy)$; восстановите потенциал.
2. Вычислите поток (x, y, z) через границу единичного куба.
3. Найдите поток $(0, 0, 1)$ через верхнеориентированный график $z = x^2 + y^2$ над единичным диском.
4. По Стоксу вычислите циркуляцию $(-y, x, 0)$ по окружности радиуса 2.
5. Объясните, как изменятся оба интеграла в формуле Стокса при смене ориентации.