ЛЕКЦИЯ 4

Двойной интеграл: область и выбор координат

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Двойной интеграл суммирует вклады по площади. Порядок интегрирования и замена координат определяются геометрией области, а якобиан учитывает изменение элемента площади.

Цели обучения

- Записывать повторные интегралы по заданной области.
- Выполнять замену переменных и переход к полярным координатам.
- Вычислять площади, объёмы, массы и площади графиков.

Суммирование по области плоскости

Разобьём ограниченную область D на малые части площадей ΔS_i и выберем в каждой точку P_i. Предел сумм $\sum f(P_i)\Delta S_i$ при измельчении разбиения, если он существует и не зависит от выбора точек, называется двойным интегралом:

$$\iint_D f(x,y)\,dA.$$

Для непрерывной функции на замкнутой ограниченной области с кусочно-гладкой границей интеграл существует. Если $f \geq 0$, он геометрически равен объёму между плоскостью $z = 0$ и графиком $z = f(x,y)$. При меняющемся знаке положительные и отрицательные вклады учитываются со своими знаками.

Действуют линейность, аддитивность по областям с непересекающимися внутренностями и сохранение неравенств. При $m \leq f \leq M$ получаем $mS(D) \leq \iint_D f\,dA \leq MS(D)$. В частности, $\iint_D 1\,dA$ есть площадь самой области.

От двойного интеграла к повторному

Если область задана условиями $a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$, то

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Во внутреннем интеграле x фиксирован. Границы для y описывают вертикальный срез области. После его вычисления остаётся функция только от x. Для горизонтальных срезов порядок меняется вместе с границами.

Разбор A. Треугольник и линейная плотность вклада

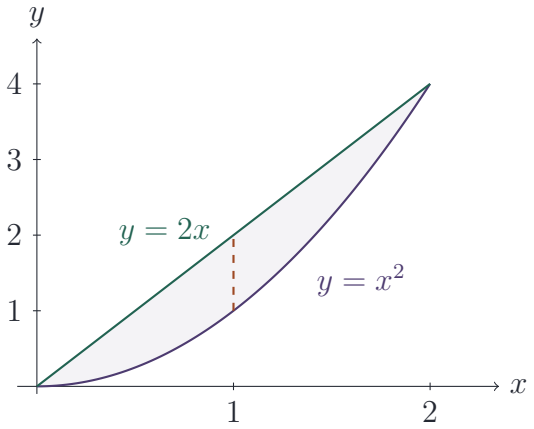
Пусть D задана $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 2$. Тогда

$$\begin{aligned}\iint_D (x+2y)\,dA &= \int_0^2 \int_0^{2-x} (x+2y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^2 \big(x(2-x) + (2-x)^2\big)dx = \int_0^2 (4-2x)dx = 4.\end{aligned}$$

При обратном порядке границы имеют вид $0 \le y \le 2$, $0 \le x \le 2 - y$. Симметрия треугольника даёт дополнительную проверку: интегралы x и y равны, каждый равен $4/3$.

Смена порядка требует нового описания области

Рассмотрим область между $y = x^2$ и $y = 2x$. Точки пересечения находятся из $x^2 = 2x$, то есть $x = 0, 2$. При вертикальных срезах $0 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 2x$.



Для горизонтальных срезов y меняется от 0 до 4. Неравенства дают $y/2 \le x \le \sqrt{y}$. Поэтому

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f\,dy\,dx = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f\,dx\,dy.$$

Например, площадь равна $\int_0^2 (2x - x^2)dx = 4/3$. Простая перестановка символов dx, dy без изменения границ задала бы другую задачу.

Замена переменных и якобиан

При гладкой взаимно однозначной замене $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ с ненулевым якобианом внутри области используется формула

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v))\,|J(u, v)|\,du\,dv, \qquad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Якобиан равен определителю матрицы первых производных. Его модуль измеряет местное изменение площади; знак отражает ориентацию и не должен делать площадь отрицательной. Граничные исключения допустимы при стандартных условиях применимости формулы.

Разбор B. Линейная замена

Пусть $x = u + v$, $y = u - v$, а $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$. Якобиан равен -2, поэтому площадь полученного параллелограмма равна $\int_0^1 \int_0^2 2\,dv\,du = 4$. Использование J вместо $|J|$ дало бы неверный знак.

Полярные координаты

Для круговой геометрии удобно $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Якобиан равен r, поэтому $dA = r\,dr\,d\theta$. Множитель r соответствует росту длины дуги при увеличении радиуса.

$$\iint_{x^2+y^2\le 4} (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\,dr\,d\theta = 8\pi.$$

В подынтегральной функции появляется r^2, а ещё один множитель r приходит из элемента площади. Их происхождение различно. Для эллипса $x^2/4 + y^2/9 \le 1$ замена $x = 2u$, $y = 3v$ даёт диск и якобиан 6, поэтому площадь равна 6π.

Геометрические и физические приложения

Если тело находится между $z = g(x, y)$ и $z = h(x, y)$, где $h \ge g$, его объём равен $\iint_D (h - g)\,dA$. Например, под параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$ над диском радиуса 2

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\,dr\,d\theta = 8\pi.$$

Для пластинки с неотрицательной поверхностной плотностью ρ масса $m = \iint_D \rho\,dA$, а координаты центра тяжести при $m > 0$ равны

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho\,dA, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho\,dA.$$

На единичном квадрате при $\rho = 1 + x$ масса равна $3/2$, первый момент по x равен $5/6$, поэтому $\bar{x} = 5/9$; симметрия по y даёт $\bar{y} = 1/2$. Центр сдвинут к более плотной части.

Для гладкого графика $z = f(x, y)$ площадь поверхности определяется формулой

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dA.$$

Множитель учитывает наклон маленького участка относительно плоскости. Для $z = 2x + y$ над единичным квадратом он постоянен и равен $\sqrt{6}$, поэтому площадь равна $\sqrt{6}$, а не площади проекции 1.

Разбор C. Момент инерции кольцевой пластинки

Для однородного кольца $a \le \sqrt{x^2+y^2} \le b$ с поверхностной плотностью $\rho_0 > 0$ момент инерции относительно перпендикулярной оси через центр равен интегралу квадратов расстояний, взвешенных по массе:

$$I_z = \iint_D (x^2+y^2)\rho_0 \, dA = 2\pi\rho_0 \int_a^b r^3 \, dr = \frac{\pi\rho_0}{2}(b^4 - a^4).$$

Так как $m = \pi\rho_0(b^2-a^2)$, получаем $I_z = m(a^2+b^2)/2$. При $a = 0$ это формула для диска $I_z = mb^2/2$. Масса входит с множителем квадрата длины, что соответствует смыслу момента инерции. Двойной интеграл различает распределения одной и той же массы: перенос вещества дальше от оси увеличивает вклад из-за множителя r^2.

Задания для самостоятельного разбора

1. Вычислите интеграл xy по прямоугольнику $[0,2] \times [0,1]$.
2. Поменяйте порядок в $\int_0^1 \int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx$.
3. Найдите площадь кольца $1 \le x^2+y^2 \le 9$ в полярных координатах.
4. Вычислите массу треугольника разбора A при плотности $x+y$.
5. Найдите площадь графика $z = x+y$ над диском радиуса 1.