ЛЕКЦИЯ 8

Числовые ряды: когда бесконечная сумма конечна

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Сумма ряда определяется пределом частичных сумм. Малость отдельного слагаемого необходима, но сходимость зависит от накопления всей последовательности вкладов.

Цели обучения

- Вычислять частичные суммы простейших рядов.
- Применять сравнение, интегральный, коренной и признак отношений.
- Обосновывать сходимость и оценивать хвост положительного ряда.

Что означает сумма бесконечного числа членов

Для последовательности a_n выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется числовым рядом. Сначала определяют конечные частичные суммы $S_N = a_1 + \cdots + a_N$. Если существует конечный предел $S_N \to S$, ряд сходится и его сумма равна S. В противном случае ряд расходится.

Это определение не предполагает, что бесконечное количество действий можно выполнить обычным сложением. Все выводы о сумме опираются на предел. Изменение конечного числа членов не меняет сходимости, хотя обычно меняет числовое значение суммы.

Разбор A. Геометрический ряд

При $q \neq 1$ имеем

$$1 + q + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Если $|q| < 1$, последний член числителя стремится к нулю и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$. При $|q| \geq 1$ члены не стремятся к нулю, поэтому ряд расходится. Например, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n = 1/2$; начало нумерации меняет сумму.

Необходимое условие и критерий Коши

Если ряд сходится, то $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$. Обратное неверно: у гармонического ряда $\sum 1/n$ члены стремятся к нулю, но сумма расходится. Группировка от $2^{k-1}+1$ до 2^k даёт в каждой группе вклад не меньше $1/2$, поэтому частичные суммы неограниченны.

Критерий Коши формулируется непосредственно через хвосты: для всякого $\varepsilon > 0$ существует N, такое что при $m > n \geq N$

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Это необходимое и достаточное условие сходимости. Для положительного ряда частичные суммы возрастают, поэтому его сходимость равносильна ограниченности последовательности S_N сверху.

Разбор B. Телескопическое сокращение

Поскольку $1/[n(n+2)] = \frac{1}{2}(1/n - 1/(n+2))$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \longrightarrow \frac{3}{4}.$$

Сокращение выполняется сначала в конечной сумме. Остаток после N членов известен точно, поэтому можно сразу оценить точность приближения к сумме ряда.

Сравнение с известным рядом

Пусть начиная с некоторого номера $0 \leq a_n \leq b_n$. Сходимость $\sum b_n$ влечёт сходимость $\sum a_n$; расходимость $\sum a_n$ влечёт расходимость $\sum b_n$. Два противоположных вывода из этих неравенств сделать нельзя.

Если $a_n, b_n > 0$ и $a_n/b_n \to c \in (0, \infty)$, ряды сходятся или расходятся одновременно. Действительно, достаточно далеко отношение зажато между двумя положительными постоянными, и работает обычное сравнение.

Например, для $a_n = (3n+1)/(n^3+2)$ сравнение с $b_n = 1/n^2$ даёт предел отношения 3. Значит, ряд сходится. Для $a_n = 1/\sqrt{n^2+1}$ сравнение с $1/n$ даёт предел 1, поэтому ряд расходится. Сходство выражений становится доказательством только после вычисления отношения.

Признаки Даламбера и Коши

Экспоненциальный масштаб членов

Для положительных a_n:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{или} \quad L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Если $L < 1$, ряд сходится; если $L > 1$, расходится. При $L = 1$ эти признаки не дают ответа. Первый называется признаком Даламбера, второй — коренным признаком Коши.

При $L < 1$ члены начиная с некоторого номера ограничиваются геометрическим масштабом q^n, где $L < q < 1$. Это объясняет связь обоих признаков с геометрическим рядом.

Разбор C. Факториал в знаменателе

Для $a_n = 3^n/n!$ отношение равно $3/(n+1) \to 0$, поэтому ряд сходится. Для $a_n = n!/3^n$ отношение равно $(n+1)/3 \to \infty$, и члены даже не стремятся к нулю.

Для $a_n = ((n+1)/(3n))^n$ корень степени n равен $(n+1)/(3n) \to 1/3$, поэтому ряд сходится. Напротив, у рядов $\sum 1/n$ и $\sum 1/n^2$ оба предела отношений равны 1, хотя результаты о сходимости различаются.

Интегральный признак и оценка остатка

Пусть f непрерывна, положительна и убывает на $[1,\infty)$, $a_n = f(n)$. Тогда ряд $\sum a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ сходятся одновременно. Сравнение площадей прямоугольников с площадью под графиком даёт для остатка сходящегося ряда

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \le R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \le \int_{N}^{\infty} f(x)dx.$$

Для степенного ряда $\sum 1/n^p$ получаем сходимость ровно при $p > 1$. Здесь речь о числовом ряде со степенными членами, а не о степенном ряде функций по переменной x.

Например, при $p = 2$ имеем $1/(N+1) \le R_N \le 1/N$. Чтобы гарантировать ошибку не больше 0,01, достаточно взять $N = 100$. Оценка может быть грубой, но она даёт доказанную границу без знания точной суммы.

Для $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ подстановка $u = \ln x$ сводит соответствующий интеграл к $\int du/u^2$, поэтому ряд сходится. Если квадрат логарифма заменить первой степенью, получится расходящийся логарифмический интеграл.

Задания для самостоятельного разбора

1. Найдите сумму $\sum_{n=1}^{\infty} 1/[n(n+1)]$ через частичные суммы.
2. Исследуйте $\sum (n+2)/(n^3+1)$ предельным сравнением.
3. Примените признак отношений к $\sum n^2/2^n$.
4. Объясните, почему предел отношения 1 не доказывает расходимости.
5. Оцените остаток $\sum 1/n^3$ после первых десяти членов.