ЛЕКЦИЯ 9

Знакопеременные ряды и точность частичной суммы

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Чередование знаков может обеспечить сходимость даже при расходимости ряда модулей. Условия признака и оценка остатка определяют, когда такое взаимное сокращение действительно работает.

Цели обучения

- Различать абсолютную и условную сходимость.
- Проверять условия признака Лейбница.
- Подбирать число слагаемых по требуемой точности.

Что меняется при появлении знаков

Для положительного ряда частичные суммы монотонны. Если знаки меняются, суммы могут колебаться, а разные вклады частично компенсируются. Поэтому признаки для положительных рядов нельзя применять к знакопеременному ряду без пояснения, что исследуется ряд модулей.

Ряд $\sum a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\sum |a_n|$. Абсолютная сходимость влечёт обычную: любой модуль конечного хвоста не превосходит соответствующего хвоста ряда модулей, и критерий Коши переносится на исходный ряд. Если исходный ряд сходится, а ряд модулей расходится, сходимость называют условной.

Признак Лейбница

Пусть $b_n \geq 0$, начиная с некоторого номера $b_{n+1} \leq b_n$ и $b_n \to 0$. Тогда знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

сходится. Для монотонного хвоста чётные и нечётные частичные суммы ограничивают друг друга и сходятся к общему пределу: разность соседних сумм стремится к нулю.

Убывание не обязательно должно начинаться с первого члена: конечное число исключений не влияет на сходимость. Но исчезновение b_n без монотонности не является полной проверкой признака.

Разбор A. Условная сходимость

Ряд $1-1/2+1/3-1/4+\dots$ сходится по Лейбницу. Ряд модулей является гармоническим и расходится. Поэтому сходимость условная. Равенство суммы $\ln 2$ можно установить позднее с помощью степенного разложения логарифма; для самого доказательства сходимости значение суммы не требуется.

Ряд $\sum(-1)^{n-1}/n^2$ сходится абсолютно, поскольку $\sum 1/n^2$ сходится. Признак Лейбница тоже применим, но он один не различает абсолютную и условную сходимость. Классификация требует отдельного исследования модулей.

Остаток и гарантированная точность

Ошибка знакочередующейся суммы

Если N находится в участке монотонности, а S_N — сумма первых N членов, то

$$|S - S_N| \le b_{N+1}.$$

Остаток имеет знак первого отброшенного члена, если он ненулевой. Поэтому сумма находится между двумя соседними частичными суммами.

Для таких N чётные суммы дают нижнюю оценку, нечётные — верхнюю. Это не только оценка абсолютной ошибки, но и способ построить интервал, заведомо содержащий точное значение.

Разбор B. Число членов по заданной погрешности

Для $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n^2$ нужно обеспечить ошибку не больше 10^{-3}. Достаточно $1/(N+1)^2 \le 10^{-3}$. Наименьшее целое N, удовлетворяющее этой оценке, равно 31: $1/32^2 < 10^{-3}$, тогда как $1/31^2 > 10^{-3}$.

Сумма S_{31} лежит выше S, а S_{32} — ниже. Оценка через положительный хвост $\sum 1/n^2$ была бы гораздо грубее: она не использует чередование знаков. Приближённый расчёт должен опираться на структуру именно исходного ряда.

Параметр в степени знаменателя

Для семейства $\sum(-1)^{n-1}/n^p$ получаем три режима. При $p > 1$ сходимость абсолютная по степенному признаку для модулей. При $0 < p \le 1$ члены убывают к нулю, поэтому ряд сходится по Лейбницу, но ряд модулей расходится: сходимость условная. При $p \le 0$ члены не стремятся к нулю, поэтому ряд расходится.

Такая классификация требует двух независимых вопросов: сходится ли исходный ряд и сходится ли ряд его модулей. Нельзя объявлять исходный ряд расходящимся только потому, что сумма модулей бесконечна.

Разбор C. Убывание с некоторого номера

Рассмотрим $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln n/n$. Члены по модулю стремятся к нулю. Для функции $b(x) = \ln x/x$ производная равна $(1-\ln x)/x^2$, поэтому она убывает при $x > e$. Признак Лейбница применим начиная с $n = 3$.

Ряд модулей расходится: при $n \geq 3$ выполнено $\ln n > 1$, следовательно, $\ln n/n \geq 1/n$. Значит, исходная сходимость условная. Небольшой начальный участок, где монотонность отличается, не меняет вывода.

Когда чередование не спасает

Можно построить положительные $b_n \to 0$, для которых $\sum(-1)^{n-1}b_n$ расходится. Положим $b_{2k-1} = 1/k$, $b_{2k} = 1/(2k)$. Сумма каждой пары равна $1/(2k)$, поэтому чётные частичные суммы растут как половина гармонических и неограниченны. Общая последовательность b_n не является убывающей.

Другой простой случай: в $\sum(-1)^{n-1}n/(n+1)$ модули стремятся к единице. Здесь нарушено уже необходимое условие, и дополнительный анализ монотонности не нужен. Проверка стремления члена к нулю должна предшествовать более сложным признакам.

Порядок сложения и устойчивость результата

При абсолютной сходимости перестановка членов сохраняет сумму. Для условно сходящегося ряда это в общем случае неверно: положительные и отрицательные части по отдельности имеют бесконечные суммарные вклады. Поэтому нельзя произвольно переставлять члены или вычитать две расходящиеся суммы, даже если формально видны сокращения.

Группировка конечных соседних блоков у уже сходящегося ряда сохраняет сумму, но обратный вывод требует осторожности. Например, $(1-1)+(1-1)+\ldots$ имеет нулевые суммы блоков, тогда как исходные частичные суммы $1-1+1-1+\ldots$ колеблются между 1 и 0. Блочное сокращение не заменяет определение через все частичные суммы.

Задания для самостоятельного разбора

1. Классифицируйте сходимость $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$.
2. Докажите абсолютную сходимость $\sum \sin n/n^2$ сравнением модулей.
3. Сколько членов ряда $\sum(-1)^{n-1}/n^3$ достаточно для ошибки не больше 10^{-4}?
4. Исследуйте $\sum(-1)^n n/(n^2+1)$, проверив убывание модулей.
5. Объясните, почему попарное сокращение не доказывает сходимость $1-1+1-1+\ldots$.