ЛЕКЦИЯ 10

Функциональные ряды: равномерность и радиус сходимости

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Для ряда функций нужно контролировать не только номер слагаемого, но и аргумент. Равномерная сходимость позволяет передавать пределу свойства, а степенная структура задаёт удобную область вычислений.

Цели обучения

- Различать поточечную и равномерную сходимость.
- Применять признак Вейерштрасса.
- Находить радиус сходимости и проверять граничные точки.

Ряд, сумма которого зависит от аргумента

В функциональном ряде $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ каждое слагаемое является функцией. При фиксированном x получается обычный числовой ряд. Множество значений x, для которых он сходится, называют областью сходимости; на ней определена сумма $S(x)$. Частичные суммы $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ приближают эту функцию.

Поточечная сходимость означает, что для каждого выбранного x остаток $R_N(x) = S(x) - S_N(x)$ стремится к нулю. Номер, после которого ошибка меньше ε, может зависеть от x. Для **равномерной сходимости** на множестве E один номер должен подходить сразу всем его точкам:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall N \geq N_0 \quad \forall x \in E : \quad |R_N(x)| < \varepsilon.$$

Эквивалентно, $\sup_{x \in E} |R_N(x)| \to 0$. Именно независимость номера от аргумента позволяет обосновывать операции с бесконечной суммой.

Разбор A. Один ряд на разных множествах

Для геометрического ряда при $|x| < 1$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad R_N(x) = \frac{x^{N+1}}{1-x}.$$

На $[0, q]$, где $0 < q < 1$, выполнено $|R_N(x)| \le q^{N+1}/(1-q) \to 0$, поэтому сходимость равномерная. На $[0, 1)$ сумма существует в каждой точке, однако при любом фиксированном N остаток неограниченно возрастает при $x \to 1-$. Равномерной сходимости здесь нет. Приближение хорошее на каждом отрезке, отделённом от 1, но единой оценки для всего полуинтервала не существует.

Признак Вейерштрасса

Пусть на всём множестве E выполняется $|u_n(x)| \le M_n$, где $M_n \ge 0$ и числовой ряд $\sum M_n$ сходится. Тогда функциональный ряд сходится на E абсолютно и равномерно. Действительно, любой его хвост по модулю не превосходит соответствующего хвоста числового ряда, не зависящего от x.

Для $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n^2$ можно взять $M_n = 1/n^2$. Поэтому сходимость равномерная на всей прямой. Эта оценка одновременно даёт контроль ошибки:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{N}.$$

Например, $N = 1000$ обеспечивает ошибку не более 0,001 при любом действительном x. Признак является достаточным: невозможность найти удобную мажоранту сама по себе не доказывает отсутствие равномерной сходимости.

Какие операции разрешены с суммой

Если непрерывные функции образуют равномерно сходящийся ряд, его сумма непрерывна. На конечном отрезке $[a, b]$ равномерная сходимость ряда непрерывных функций также позволяет интегрировать почленно:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Причина видна из оценки интеграла остатка: его модуль не больше $(b-a)\sup|R_N|$. Таким образом, равномерная малость ошибки сохраняется после интегрирования.

С дифференцированием нужны более сильные условия. Если $u_n \in C^1[a, b]$, ряд $\sum u_n(x_0)$ сходится хотя бы в одной точке, а ряд производных $\sum u_n'$ сходится равномерно на $[a, b]$, то исходный ряд сходится равномерно и его сумму можно дифференцировать почленно. Равномерной сходимости только исходного ряда недостаточно.

В примере с $\sin(nx)/n^2$ формальные производные образуют ряд $\sum \cos(nx)/n$. При $x = 0$ это расходящийся гармонический ряд. Следовательно, равномерная сходимость исходного ряда не оправдывает такую операцию на отрезке, содержащем нуль.

Степенная структура и радиус сходимости

Степенной ряд с центром x_0 имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Существует радиус $R \in [0, +\infty]$: при $|x - x_0| < R$ ряд сходится абсолютно, а при $|x - x_0| > R$ расходится. На границе требуется отдельная проверка. Общая формула Коши–Адамара и удобная формула при существовании предела имеют вид

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Во второй формуле предполагается, что нужные коэффициенты ненулевые начиная с некоторого номера. Приняты соглашения $1/0 = +\infty$, $1/(+\infty) = 0$. На каждом отрезке $|x - x_0| \le r < R$ сходимость равномерная, что следует из сравнения с рядом модулей в точке немного дальше от центра.

Разбор B. Концы интервала исследуются независимо

Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n/(n3^n)$. Отношение модулей соседних членов стремится к $|x-2|/3$, поэтому $R = 3$, а внутри $(-1, 5)$ сходимость абсолютная. При $x = -1$ получается $\sum (-1)^n/n$: он сходится условно по Лейбницу. При $x = 5$ получается $\sum 1/n$, который расходится. Полная область сходимости равна $[-1, 5)$.

У ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ радиус бесконечен, поскольку отношение соседних модулей равно $|x|/(n+1)$. У ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ радиус нулевой: при $x \neq 0$ отношение равно $(n+1)|x|$ и члены не стремятся к нулю. В центре $x = 0$ оба ряда сходятся.

Почленные операции внутри радиуса

Производная и первообразная степенного ряда имеют тот же радиус сходимости, хотя поведение на концах может измениться. Для $|x| < 1$ геометрический ряд даёт

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \qquad -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Первое равенство получено дифференцированием, второе — интегрированием от 0 до x. Постоянная интегрирования определена значением в нуле. Эти выводы относятся к внутренности интервала; подстановка граничных значений требует дополнительного обоснования.

Чтобы разложить $1/(3-x)$, сначала выделяют геометрическую форму: $1/(3-x) = \frac{1}{3}(1 - x/3)^{-1}$. Поэтому коэффициенты равны $1/3^{n+1}$, а область абсолютной сходимости задаётся $|x| < 3$. Масштаб аргумента меняет радиус, и его нельзя потерять при подстановке.

Разбор C. Равномерная точность степенного приближения

Пусть $S_N(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}(x/3)^n$ приближает $1/(3-x)$ на $[-1,1]$. Из формулы геометрического остатка следует

$$\left|\frac{1}{3-x} - S_N(x)\right| = \left|\frac{(x/3)^{N+1}}{3(1-x/3)}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}.$$

При $N=7$ правая часть равна $1/13122 < 10^{-4}$, поэтому восемь слагаемых обеспечивают нужную точность одновременно во всех точках отрезка. Важно различать степень N и количество членов $N+1$, поскольку суммирование начинается с нуля.

Если отрезок расширить до $[-2,2]$, оценка станет $(2/3)^{N+1}$ и для той же точности потребуется больше членов. Радиус сходимости в обоих случаях равен 3, но скорость приближения зависит от расстояния до его границы. Само утверждение о сходимости не сообщает, насколько длинной должна быть конечная сумма для вычислений.

Задания для самостоятельного разбора

1. Докажите равномерную сходимость $\sum \cos(nx)/n^2$ на $\mathbb{R}$.
2. Найдите радиус и все граничные точки сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^n/(n^2 2^n)$.
3. Исследуйте сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ при $x = \pm 1$.
4. Разложите $1/(2+x)$ в степенной ряд около нуля и укажите радиус.
5. Объясните, почему поточечной сходимости недостаточно для оценки интеграла остатка через единую малую константу.