ЛЕКЦИЯ 11

Ряды Тейлора: приближение с контролем ошибки

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Производные в одной точке задают коэффициенты локального степенного представления. Остаток показывает, когда это представление равно функции и насколько точна конечная сумма.

Цели обучения

- Строить разложения Тейлора и Маклорена.
- Вычислять значения функций и пределы через ряды.
- Интегрировать разложения и оценивать погрешность.

От производных к многочлену

Линейное приближение использует значение функции и первую производную. Чтобы точнее описать её около a, подбирают многочлен, совпадающий с функцией и по следующим производным. Условия $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ для $k = 0, \dots, n$ однозначно дают

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Это формула Тейлора; при $a = 0$ её называют формулой Маклорена. Коэффициент при $(x-a)^k$ определяется именно k-й производной: при дифференцировании k раз возникает множитель $k!$.

Если f имеет непрерывные производные до порядка $n+1$ на отрезке между a и x, то остаток допускает форму Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad \xi \text{ лежит между } a \text{ и } x.$$

Если $|f^{(n+1)}| \le M$ на этом отрезке, то $|R_n(x)| \le M|x-a|^{n+1}/(n+1)!$. Таким образом, приближение сопровождается проверяемой оценкой, а не только указанием порядка отброшенных слагаемых.

Когда бесконечный ряд равен функции

Существование всех производных позволяет записать ряд Тейлора, но не гарантирует равенства его суммы исходной функции. Для такого равенства нужно доказать $R_n(x) \to 0$. Например, продолженная нулём в точке 0 функция e^{-1/x^2} имеет там все производные, равные нулю. Её ряд Маклорена тождественно нулевой, хотя при $x \neq 0$ функция положительна.

Для основных элементарных функций справедливы разложения

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, && x \in \mathbb{R}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, && x \in \mathbb{R}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, && x \in \mathbb{R}, \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, && -1 < x \leq 1. \end{aligned}$$

Для экспоненты на любом фиксированном отрезке остаток стремится к нулю благодаря факториалу; для синуса и косинуса производные ограничены единицей. Логарифмический ряд внутри $(-1, 1)$ получается интегрированием геометрического ряда для $1/(1+x)$. При $x = 1$ равенство суммы $\ln 2$ можно обосновать интегральным остатком, а при $x = -1$ ряд расходится.

Биномиальное разложение при $|x| < 1$ имеет вид

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots .$$

Если α — неотрицательное целое число, разложение заканчивается и становится точным многочленом. В остальных случаях поведение на границе зависит от α и исследуется отдельно.

Значение функции с заданной точностью

Разбор A. Экспонента при малом аргументе

При $x = 0{,}2$ многочлен четвёртой степени даёт

$$e^{0{,}2} \approx 1 + 0{,}2 + \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^3}{6} + \frac{0{,}2^4}{24} = 1{,}2214.$$

На $[0, 0{,}2]$ все производные экспоненты не превосходят $e^{0{,}2} < 1{,}25$. Последняя оценка следует, например, из сравнения её ряда с $\sum 0{,}2^n = 1{,}25$. Поэтому

$$|R_4(0{,}2)| < \frac{1{,}25 \cdot 0{,}2^5}{120} < 3{,}34 \cdot 10^{-6}.$$

Истинное значение больше найденного многочлена, так как все отброшенные члены положительны. Количество сохранённых слагаемых выбирается по оценке остатка, а не по тому, насколько правдоподобно выглядит десятичная запись.

Разбор B. Логарифм и чередование знаков

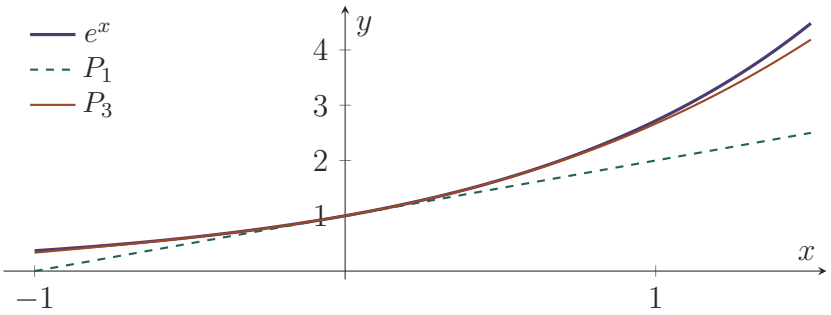
Для $\ln 1{,}2$ первые пять членов дают

$$0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^3}{3} - \frac{0{,}2^4}{4} + \frac{0{,}2^5}{5} = 0{,}1823306\ldots.$$

Модули членов убывают, поэтому ошибка меньше $0{,}2^6/6 < 1{,}067 \cdot 10^{-5}$. Следующий член отрицателен: полученное значение является верхним приближением. Оценка Лейбница здесь удобнее общей формулы с неизвестной точкой ξ.

Геометрия локального приближения

Для e^x многочлены $P_1 = 1 + x$ и $P_3 = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ имеют разный порядок контакта с графиком в нуле. При увеличении расстояния от центра точность обычно ухудшается; большая степень сама по себе не заменяет проверки области и остатка.



Если требуется значение около $a \neq 0$, можно разлагать непосредственно по степеням $x - a$. Например, $\ln x = \ln a + \ln(1 + (x - a)/a)$ при $a > 0$. Малый параметр тогда равен $(x - a)/a$, а условие внутренней сходимости — $|x - a| < a$.

Пределы: сохраняем первый ненулевой остаток

Разбор C. Сокращение первых членов

Из $\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)$ следует

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} = \frac{1}{120}.$$

Члены до третьего порядка сокращаются. Если остановить разложение на x^3, числитель окажется обозначен лишь как $o(x^3)$, чего недостаточно для деления на x^5. Нужен порядок, соответствующий знаменателю. При умножении разложений сохраняют все произведения, способные внести вклад в этот порядок.

Интеграл без элементарной первообразной

Ряд $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/n!$ равномерно сходится на $[0, 1/2]$, поэтому интегрируется почленно:

$$I = \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Сохраним члены с $n = 0, 1, 2, 3$:

$$I \approx \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/2)^5}{10} - \frac{(1/2)^7}{42} = 0{,}46127232\ldots.$$

Модули убывают, а первый отброшенный член равен $(1/2)^9/216 < 9{,}05 \cdot 10^{-6}$. При округлении результата до 0,461272 добавляется ошибка меньше 0,00000033, поэтому итоговая погрешность остаётся меньше 10^{-5}. Такая проверка связывает точность ряда с точностью напечатанного числа.

Разбор D. Корень и оценка через производную

При $\alpha = 1/2$ первые три члена биномиального разложения дают $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8$. Подставим $x = 0{,}04$:

$$\sqrt{1{,}04} \approx 1 + 0{,}02 - 0{,}0002 = 1{,}0198.$$

Для $f(x) = \sqrt{1+x}$ третья производная равна $3/[8(1+x)^{5/2}]$. На отрезке $[0, 0{,}04]$ она положительна и не превосходит $3/8$. Формула Лагранжа поэтому даёт

$$0 < R_2(0{,}04) \le \frac{3}{8}\frac{0{,}04^3}{6} = 4 \cdot 10^{-6}.$$

Точное значение лежит между 1,0198 и 1,019804. Мы использовали конечную формулу Тейлора и границу производной; для этой оценки не понадобилось исследовать весь бесконечный ряд на концах его интервала сходимости. Для приближения вдали от единицы следует выбирать более близкий центр разложения или сначала преобразовать аргумент.

Задания для самостоятельного разбора

1. Запишите первые четыре ненулевых члена ряда $\sin(2x)$.
2. Постройте многочлен Тейлора второго порядка для $\ln x$ около $x = 1$.
3. Вычислите $\lim_{x \to 0} (\cos x - 1 + x^2/2)/x^4$.
4. Оцените $\sqrt{1{,}02}$ с помощью биномиального разложения и ограничьте ошибку.
5. Подберите число членов для вычисления $\int_0^{1/3} \cos(x^2)\,dx$ с ошибкой менее 10^{-6} и обоснуйте её.