ЛЕКЦИЯ 14

Постоянные коэффициенты: характеристические корни и резонанс

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Экспоненциальные решения превращают дифференциальный оператор в многочлен. Корни описывают свободное движение, а форма внешнего воздействия определяет удобный вид частного решения.

Цели обучения

- Строить решения по действительным и комплексным корням.
- Подбирать частное решение для специальной правой части.
- Учитывать резонанс и задавать начальные условия.

Экспонента превращает оператор в многочлен

Рассмотрим линейное однородное уравнение с действительными постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0, \qquad a_n \neq 0.$$

Для пробного решения $y = e^{\lambda x}$ каждая производная умножает функцию на λ. После подстановки и сокращения ненулевой экспоненты получаем **характеристическое уравнение**

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Оно связывает дифференциальную задачу с алгебраической. Каждый простой действительный корень даёт решение $e^{\lambda x}$. Чтобы получить общее решение, нужно учесть все корни и их кратности: число независимых действительных решений должно совпасть с порядком уравнения.

Разбор A. Различные действительные корни

Для $y'' - 3y' + 2y = 0$ многочлен равен $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Поэтому $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Если $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, то $C_1 + C_2 = 1$, $C_1 + 2C_2 = 0$. Получаем $C_1 = 2$, $C_2 = -1$ и $y = 2e^x - e^{2x}$. Начальные данные применяются ко всему решению, включая все независимые слагаемые.

Кратные корни

Действительный корень λ кратности m даёт решения

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

Повторение одной и той же экспоненты не создаёт независимых функций. Множители x^k необходимы для восстановления полной размерности пространства решений.

Для $y'' + 4y' + 4y = 0$ характеристический многочлен равен $(\lambda + 2)^2$, поэтому $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$. Это можно проверить заменой $y = e^{-2x} v$: выражение $y'' + 4y' + 4y$ превращается в $e^{-2x} v''$. Следовательно, $v'' = 0$ и $v = C_1 + C_2 x$. Такое преобразование также объясняет происхождение дополнительного множителя x.

Комплексные корни и действительное решение

Для действительных коэффициентов комплексные корни возникают сопряжёнными парами $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$. Простая пара даёт действительные решения $e^{\alpha x}\cos \beta x$ и $e^{\alpha x}\sin \beta x$. При кратности m каждую из них дополнительно умножают на $1, x, \ldots, x^{m-1}$.

Для $y'' + 2y' + 5y = 0$ корни равны $-1 \pm 2i$, поэтому

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

При $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Решение $e^{-x}\sin 2x$ колеблется, а его амплитуда ограничена e^{-x}. Действительная часть корня определяет рост или затухание, мнимая — частоту колебаний.

Для уравнения третьего порядка $y''' - y' = 0$ корни $0, 1, -1$ различны. Общее решение равно $C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$. Корень нуль соответствует постоянной функции и не должен исчезать из ответа.

Неоднородное уравнение: подбор частного решения

Для $P(D)y = f(x)$, где $D = d/dx$, решение имеет вид $y = y_h + y_p$. Метод неопределённых коэффициентов применим, когда правая часть состоит из многочленов, экспонент, синусов, косинусов и их произведений. Для произвольной правой части используют, например, вариацию постоянных.

Правило выбора формы

Если $f(x) = e^{\alpha x}\bigl(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\bigr)$, пробное частное решение выбирают в виде

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\bigl(A_m(x)\cos\beta x + B_m(x)\sin\beta x\bigr).$$

Здесь m — наибольшая степень заданных многочленов, A_m, B_m содержат все степени до m, а s — кратность корня $\alpha + i\beta$ характеристического многочлена. Если такого корня нет, $s = 0$. При $\beta = 0$ достаточно одного многочлена.

Неизвестные коэффициенты определяются подстановкой и сравнением коэффициентов при независимых функциях. Даже если в правой части есть только косинус, в пробной форме обычно нужны и косинус, и синус: дифференцирование связывает их.

Разбор B. Экспонента без совпадения с корнем

В $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ число 3 не является корнем P. Берём $y_p = Ae^{3x}$. Подстановка даёт $(9 - 9 + 2)Ae^{3x} = e^{3x}$, откуда $A = 1/2$. Поэтому $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x}/2$.

Резонанс требует дополнительной степени

Если правая часть совпадает по форме с однородным решением, обычная пробная функция уничтожается оператором. Например, при правой части e^x в предыдущем операторе попытка Ae^x всегда даёт нуль. Корень 1 простой, поэтому берём $y_p = Axe^x$:

$$y_p' = A(x+1)e^x, \quad y_p'' = A(x+2)e^x, \qquad y_p'' - 3y_p' + 2y_p = -Ae^x.$$

Отсюда $A = -1$ и $y_p = -xe^x$. Для повторного корня степень должна быть выше. В уравнении $y'' - 2y' + y = e^x$ число 1 имеет кратность 2, поэтому $y_p = Ax^2e^x$. Замена $y = e^x v$ даёт $e^x v'' = e^x$, откуда $v = x^2/2$ и $y_p = x^2e^x/2$.

Разбор C. Вынужденные колебания

Для $y'' + 4y = \cos 2x$ характеристические корни равны $\pm 2i$ и совпадают с частотой воздействия. Выберем $y_p = Ax\sin 2x$. Прямое вычисление даёт

$$y_p' = A\sin 2x + 2Ax\cos 2x, \qquad y_p'' = 4A\cos 2x - 4Ax\sin 2x.$$

Поэтому $y_p'' + 4y_p = 4A\cos 2x$, $A = 1/4$. Общее решение равно $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + (x/4)\sin 2x$. При нулевых начальных данных оба постоянных коэффициента равны нулю. Множитель x приводит к росту огибающей: это резонанс в идеальной модели без затухания.

Многочлены и сумма воздействий

Для $y'' + y = x^2$ пробуем $y_p = Ax^2 + Bx + C$. После подстановки получаем $Ax^2 + Bx + (C + 2A) = x^2$. Значит, $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$, и $y_p = x^2 - 2$. Сохранение только старшего члена Ax^2 не позволило бы компенсировать постоянное слагаемое от второй производной.

Если правая часть равна $e^x + x^2$, частное решение можно искать как сумму решений для двух отдельных правых частей. Линейность позволяет складывать результаты, но

каждое слагаемое должно соответствовать одному и тому же оператору. Коэффициенты для разных дифференциальных уравнений переносить нельзя.

Как проверять окончательный ответ

Сначала убеждаются, что в y_h содержится столько независимых постоянных, каков порядок уравнения. Затем вычисляют невязку $P(D)y_p - f$: она должна быть тождественно нулевой. После задания начальных данных проверяют каждое из них отдельно. Такая проверка выявляет пропущенную кратность, неверный знак и ошибку в коэффициенте резонансного слагаемого.

Поведение при больших положительных x также служит смысловой проверкой. В однородной задаче отрицательные действительные части всех корней приводят к затуханию, даже при наличии конечных степеней x. Положительная действительная часть допускает растущие решения. Чисто мнимые корни дают незатухающие колебания, а их кратность может добавить рост через множители x^k.

Задания для самостоятельного разбора

1. Решите $y'' - 4y = 0$ при $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
2. Найдите фундаментальную систему для $y'' - 6y' + 9y = 0$.
3. Решите $y'' + y = \sin x$ и объясните выбор пробной формы.
4. Подберите частное решение $y'' - y' = x + 1$, учитывая корень нуль.
5. Найдите общее решение $y''' - y' = e^{2x}$ и проверьте число постоянных.