ЛЕКЦИЯ 12

Уравнения первого порядка: модель, начальное условие, решение

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Дифференциальное уравнение связывает состояние со скоростью его изменения. Тип зависимости подсказывает метод решения, а начальное условие выбирает конкретную траекторию из семейства.

Цели обучения

- Формулировать задачу Коши и проверять условия единственности.
- Решать разделяющиеся, однородные и линейные уравнения.
- Использовать подстановки и параметризацию неявных уравнений.

Уравнение задаёт закон изменения

Обыкновенное дифференциальное уравнение связывает независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и её производные. Порядок определяется старшей производной. Решением называют функцию, которая на некотором интервале имеет нужные производные и обращает уравнение в тождество. Формула без указания допустимого интервала может скрывать разрывы или потерянные ветви.

Нормальная форма уравнения первого порядка — $y' = f(x, y)$. Общее решение обычно содержит одну произвольную постоянную; начальное условие $y(x_0) = y_0$ задаёт **задачу Коши** и выбирает конкретную интегральную кривую. Геометрически величина $f(x, y)$ задаёт наклон касательной в каждой точке плоскости.

Разбор A. Модель охлаждения

При постоянной температуре среды T_a и коэффициенте $k > 0$ закон $T' = -k(T - T_a)$ означает, что скорость изменения пропорциональна разности температур. Решение задачи $T(0) = T_0$ равно

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}.$$

Подстановка даёт $T' = -k(T_0 - T_a)e^{-kt} = -k(T - T_a)$, а при $t = 0$ получается T_0. Постоянная функция $T = T_a$ также является решением. При $t \to +\infty$ разность температур стремится к нулю, что согласуется со знаком коэффициента в модели.

Существование и единственность

Непрерывность f в окрестности (x_0, y_0) обеспечивает локальное существование решения. Если дополнительно f локально липшицева по y, решение локально единственно. Удобное достаточное условие — непрерывность f и f_y в некотором прямоугольнике вокруг начальной точки. Утверждение локальное: продолжение на всю прямую требует отдельного исследования.

Для $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ непрерывность есть, но условие Липшица около $y = 0$ нарушено. Помимо $y \equiv 0$ существуют решения, которые остаются нулевыми до произвольного момента $c \geq 0$, а затем принимают вид

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ (x - c)^2, & x \geq c. \end{cases}$$

В точке склейки производная с обеих сторон равна нулю, поэтому уравнение выполняется и там. Это показывает, что непрерывности правой части недостаточно для единственности.

Разделение переменных

Если $y' = g(x)h(y)$, то на участке, где $h(y) \neq 0$, можно записать $dy/h(y) = g(x)\,dx$ и проинтегрировать. До деления отдельно находят корни $h(y) = 0$: они дают постоянные решения, которые иначе могут потеряться.

Для $y' = x(1 + y^2)$ получаем $\arctan y = x^2/2 + C$. При $y(0) = 0$ локальное решение равно $y = \tan(x^2/2)$. Максимальный интервал этого решения, содержащий нуль, — $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$: на концах аргумент тангенса достигает $\pi/2$. Гладкая правая часть не исключает ухода решения в бесконечность за конечное время.

Для $y' = y(1 - y)$ до разделения выделяем $y = 0$ и $y = 1$. На остальных ветвях

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1 - y} \right) dy = x + C, \qquad \ln \left| \frac{y}{1 - y} \right| = x + C.$$

После переобозначения постоянной получается $y = 1/(1 + Ce^{-x})$ на интервалах, где знаменатель ненулевой. Решение $y = 1$ включено при $C = 0$, а $y = 0$ добавляется отдельно. Проверка исключённых значений является частью метода.

Однородное уравнение первого порядка

Уравнение $y' = F(y/x)$ при $x \neq 0$ называют однородным по отношению y/x. Подстановка $y = xv(x)$ даёт $y' = v + xv'$ и уравнение $xv' = F(v) - v$ с разделяющимися переменными. Термин «однородное» здесь относится к виду правой части и отличается от однородности линейного уравнения.

Например, $y' = 1 + y/x$ на $x > 0$ превращается в $xv' = 1$. Следовательно, $v = \ln x + C$ и

$$y = x(\ln x + C).$$

Производная равна $\ln x + C + 1 = 1 + y/x$. На отрицательной полуоси используется $\ln|x|$, но через точку $x = 0$ исходное нормальное уравнение не определено.

Линейное уравнение и интегрирующий множитель

Для $y' + p(x)y = q(x)$ при непрерывных коэффициентах вводят $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Тогда $\mu' = p\mu$, поэтому левая часть после умножения становится производной произведения:

$$(\mu y)' = \mu q, \qquad y = \frac{1}{\mu}\left(C + \int \mu q\, dx\right).$$

Множитель не обращается в нуль, поэтому преобразование эквивалентно исходному уравнению на рассматриваемом интервале.

Разбор B. Начальное условие после интегрирования

Для $y' + 2y = e^x$ множитель равен e^{2x}. Получаем $(e^{2x}y)' = e^{3x}$, откуда $e^{2x}y = e^{3x}/3 + C$ и $y = e^x/3 + Ce^{-2x}$. Условие $y(0) = 1$ даёт $C = 2/3$. Непосредственная проверка: слагаемые с e^{-2x} взаимно сокращаются в $y' + 2y$, а оставшиеся дают e^x.

Уравнение Бернулли

Уравнение $y' + py = qy^m$, где $m \neq 0, 1$, на участках с $y \neq 0$ сводится к линейному заменой $z = y^{1-m}$. После умножения на $(1-m)y^{-m}$ получаем

$$z' + (1-m)pz = (1-m)q.$$

Для $y' + y = xy^2$ положим $z = 1/y$. Тогда $z' - z = -x$, интегрирующий множитель равен e^{-x}, а решение имеет вид $z = x + 1 + Ce^x$. Следовательно,

$$y = \frac{1}{x + 1 + Ce^x}.$$

Его область определяется ненулевым знаменателем. Отдельно добавляется решение $y = 0$, потерянное при делении. При нецелом показателе m нужно также учитывать, где действительная степень y^m определена.

Уравнение в полных дифференциалах

Запись $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ особенно удобна, если существует потенциал Φ с $\Phi_x = M$, $\Phi_y = N$. Тогда $d\Phi = 0$ и интегральные кривые задаются $\Phi(x,y) = C$. Для C^1-коэффициентов на открытой односвязной области условие $M_y = N_x$ обеспечивает существование потенциала.

В уравнении $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ обе смешанные производные равны 1. Интегрируем M по x: $\Phi = x^2 + xy + g(y)$. Из $\Phi_y = x + g'(y) = x + 2y$ находим $g = y^2$. Ответ: $x^2 + xy + y^2 = C$. На участке, где $N \neq 0$, это задаёт решение нормальной формы $y' = -M/N$; в остальных точках геометрию уровня проверяют отдельно.

Неявные уравнения: производная как параметр

Если уравнение содержит y' неявно, полезно обозначить $p = y'$ и получить параметрическое описание $x = x(p)$, $y = y(p)$. При переходе к параметру выделяют случаи постоянного p и участки, где его можно использовать как локальную переменную.

Разбор C. Уравнение Клеро

Для $y = xy' + (y')^2$, то есть $y = xp + p^2$, дифференцирование даёт $p = p + (x + 2p)p'$. Отсюда либо $p' = 0$, либо $x + 2p = 0$. Первый случай приводит к семейству прямых $y = Cx + C^2$. Во втором $p = -x/2$, поэтому $y = -x^2/4$. Это особое решение: оно не получается выбором одной постоянной C и является огибающей семейства прямых. Проверка $y' = -x/2$ подтверждает исходное уравнение.

Уравнение Лагранжа имеет форму $y = x\varphi(p)+\psi(p)$. Его дифференцирование приводит, при $p \neq \varphi(p)$, к линейному уравнению относительно $x(p)$:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Постоянные значения p с $p = \varphi(p)$ рассматривают отдельно. Например, для $y = 2xp+p^2$ при $p \neq 0$ получаем $dx/dp + 2x/p = -2$. Умножив на p^2, находим

$$x = -\frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}, \qquad y = -\frac{1}{3}p^2 + \frac{2C}{p}.$$

На участках с $dx/dp \neq 0$ эти формулы задают решение как функцию $y(x)$. Постоянный параметр $p = 0$ даёт отдельное решение $y = 0$.

Задания для самостоятельного разбора

1. Решите $y' = 2xy$, $y(0) = 3$, и проверьте подстановкой.
2. Найдите все постоянные решения $y' = y(y - 2)$ до разделения переменных.
3. Решите $y' - y = x$ методом интегрирующего множителя.
4. Проверьте точность уравнения $(3x^2 + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ и найдите потенциал.
5. Для $y = xy' - (y')^2$ найдите семейство прямых и особое решение.