ЛЕКЦИЯ 13

Уравнения высших порядков: структура и понижение порядка

Преподаватель: Бауыржан Дербісалы

Кафедра «Высшая математика и физика»

Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан

Тип лекции: теоретическая лекция с разбором задач.

Основная идея

Высший порядок требует нескольких независимых начальных условий. Линейность позволяет описать всё семейство решений через фундаментальную систему и одно частное решение.

Цели обучения

- Понижать порядок в уравнениях специального вида.
- Использовать вронскиан и структуру линейного решения.
- Применять вариацию постоянных и различать начальную и краевую задачи.

Порядок и число начальных данных

Нормальная форма уравнения порядка n записывается как $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Задача Коши задаёт в одной точке значения функции и всех производных до порядка $n-1$:

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}.$$

После введения переменных $y_1 = y$, $y_2 = y'$, …, $y_n = y^{(n-1)}$ уравнение становится системой первого порядка. Поэтому непрерывность F и локальное условие Липшица по всем зависимым переменным обеспечивают локальную единственность. Непрерывные частные производные по этим переменным являются достаточным условием Липшица.

В линейном уравнении с непрерывными коэффициентами и ненулевым старшим коэффициентом задача Коши имеет единственное решение на всём рассматриваемом интервале. Нули старшего коэффициента нельзя пропускать: после деления они превращаются в особые точки.

Разбор A. Последовательное интегрирование

Из $y'' = 6x$ получаем $y' = 3x^2 + C_1$, затем $y = x^3 + C_1 x + C_2$. Для $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ ответ равен $x^3 - 2x + 1$. Две постоянные соответствуют двум независимым начальным условиям. Одного значения $y(0)$ было бы недостаточно, чтобы выбрать решение.

Понижение порядка

Если уравнение не содержит y, можно положить $p = y'$ и решить уравнение меньшего порядка для $p(x)$. Например, $y'' = -2y'$ превращается в $p' = -2p$. Поэтому $p = Ce^{-2x}$ и $y = C_1 + C_2 e^{-2x}$. Постоянное решение сохранено благодаря свободному слагаемому C_1.

Если уравнение второго порядка не содержит x явно, на участке с $y' \neq 0$ удобно считать $p = y'$ функцией от y. По цепному правилу

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Такое преобразование требует локальной обратимости $y(x)$. Постоянные решения проверяют отдельно, поскольку параметризация через y их не охватывает.

Разбор B. Независимая переменная отсутствует

Для $y'' = (y')^2$ получаем $p\,dp/dy = p^2$. При $p \neq 0$ имеем $dp/dy = p$, откуда $p = Ce^y$. Далее $e^{-y}dy = C\,dx$, поэтому $e^{-y} = Ax + B$ после переобозначения постоянных. Следовательно,

$$y = -\ln(Ax + B), \qquad Ax + B > 0.$$

Проверка даёт $y' = -A/(Ax + B)$ и $y'' = A^2/(Ax + B)^2 = (y')^2$. Случай $A = 0$, $B > 0$ включает все постоянные решения. Допустимый интервал должен оставаться по одну сторону от нуля линейного выражения.

Линейный оператор и фундаментальная система

Обозначим

$$L[y] = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y.$$

Линейность означает $L[\alpha u + \beta v] = \alpha L[u] + \beta L[v]$. Поэтому решения однородного уравнения $L[y] = 0$ образуют векторное пространство. При непрерывных коэффициентах и $a_n \neq 0$ на интервале его размерность равна n.

Фундаментальная система — это n линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$. Любое однородное решение представляется как $y_h = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$. Независимость проверяют вронскианом:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Для решений одного и того же линейного однородного уравнения ненулевого значения W в одной точке достаточно: система фундаментальна на всём интервале. Этот вывод

использует принадлежность решений общему уравнению; для произвольных функций нулевой вронскиан нельзя автоматически трактовать так же.

Формула Остроградского–Лиувилля

Для нормализованного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ вронскиан двух решений удовлетворяет $W' = -pW$. Действительно,

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2 = -p(y_1y_2' - y_1'y_2) = -pW.$$

Интегрирование даёт формулу Абеля, также называемую формулой Остроградского–Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right).$$

Для порядка n в показателе вместо p стоит a_{n-1}/a_n. Экспонента никогда не равна нулю, поэтому вронскиан либо тождественно нулевой, либо нигде не обращается в нуль на интервале.

Разбор C. Фундаментальная система с переменными коэффициентами

Рассмотрим $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ на $x > 0$. Подстановка показывает, что $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ являются решениями. Их вронскиан равен $x \cdot 2x - 1 \cdot x^2 = x^2 \neq 0$, поэтому

$$y_h = C_1x + C_2x^2.$$

После деления на x^2 коэффициент при y' равен $-2/x$, и формула Лиувилля даёт $W = Cx^2$, что согласуется с прямым вычислением. В точке $x = 0$ старший коэффициент исчезает, поэтому сделанный вывод сформулирован на интервале $x > 0$.

Структура неоднородного решения

Пусть $L[y] = f(x)$ и найдено одно частное решение y_p. Разность любых двух решений удовлетворяет однородному уравнению, поскольку $L[y - y_p] = f - f = 0$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = y_h + y_p.$$

Здесь y_p — одна конкретная функция, а все произвольные постоянные находятся в y_h. Если правая часть равна сумме нескольких функций, можно сложить соответствующие частные решения.

Вариация постоянных

Для $y'' + py' + qy = r$ с известной фундаментальной системой ищут $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. Вспомогательное условие $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ устраняет лишние производные. Подстановка в уравнение даёт второе равенство $u_1'y_1' + u_2'y_2' = r$, откуда

$$u_1' = -\frac{y_2r}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1r}{W}.$$

В формулах используется правая часть *нормализованного* уравнения. Если старший коэффициент не равен единице, сначала делят на него. Постоянные в первообразных можно принять равными нулю: они лишь добавили бы слагаемые однородного решения.

Для $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$ на $x > 0$ после нормализации $r = x$. С системой $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $W = x^2$ находим

$$u_1' = -x, \quad u_2' = 1, \quad y_p = -\frac{x^2}{2}\,x + x\,x^2 = \frac{x^3}{2}.$$

Итак, $y = C_1x + C_2x^2 + x^3/2$. При подстановке $y_p' = 3x^2/2$, $y_p'' = 3x$ левая часть равна $3x^3 - 3x^3 + x^3 = x^3$. Проверка одновременно обнаружила бы ошибку в нормализации правой части.

Краевые условия отличаются от начальных

В краевой задаче данные задаются в разных точках, например $y(a) = A$, $y(b) = B$. Даже у линейного уравнения такая задача может иметь одно, бесконечно много решений или не иметь решений. Теорема единственности задачи Коши на неё напрямую не переносится.

Для $y'' + y = 0$ решение равно $C_1\cos x + C_2\sin x$. Условия $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ оставляют произвольным C_2, поэтому решений бесконечно много. Если заменить второе условие на $y(\pi) = 1$, решений не будет. Для $y'' = 0$ с двумя заданными значениями на концах ненулевого отрезка решение, напротив, единственно: это прямая через соответствующие точки.

Задания для самостоятельного разбора

1. Решите $y''' = 6$ при $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$.
2. Понизьте порядок в $y'' + 3y' = 0$ и найдите общее решение.
3. Вычислите вронскиан e^{x}, e^{-x} и укажите уравнение, для которого они образуют фундаментальную систему.
4. Для $y'' + y = 1$ найдите частное и общее решения; задайте два начальных условия по своему выбору.
5. Определите число решений задачи $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 2$.